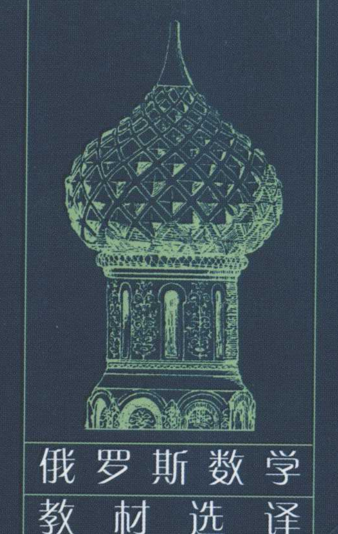
“十一五”国家重点图书



数学分析原理

（第二卷）（第9版）

□ Г. М. 菲赫金哥尔茨　著
□ 丁寿田　译



总 策 划：张小萍
责任编辑：李　鹏
封面设计：王凌波

本书是Г. М. 菲赫金哥尔茨继《微积分学教程》三卷本后的又一部关于数学分析的经典著作，是作者总结多年教学经验编写而成的。

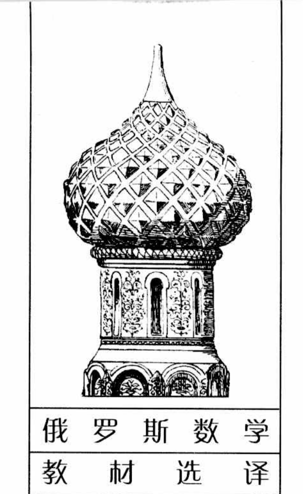
本书针对大学数学系一二年级的分析课程，因此分两卷出版。第一卷内容包括：实数、一元函数、极限论、一元连续函数、一元函数的微分法、微分学的基本定理、应用导数来研究函数、多元函数、多元函数的微分学、微积分的几何应用和力学应用，书中专列一章讲述数学分析基本观念发展简史；第二卷内容包括：数项级数、函数序列及函数级数、反常积分、带参变量的积分、隐函数和函数行列式、线积分、二重积分、曲面面积和面积分、三重积分、傅里叶级数等，书后附有“数学分析进一步发展概况”的附录。

本书可供各级各类高等学校的数学分析与高等数学课程作为教学参考书，是数学分析教师极好的案头用书。

学科类别：数学
academic.hep.com.cn



"十一五"国家重点图书



俄罗斯数学教材选译

● 数学天元基金资助项目

数学分析原理

(第二卷)(第9版)

SHUXUE FENXI YUANLI

□ Г. М. 菲赫金哥尔茨　著
□ 丁寿田　译




高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

Translation from the Russian language edition:
Basis of the mathematical analysis by Grigoriy Mikhailovich Fichtenholz

图书在版编目(CIP)数据

数学分析原理：第9版．第2卷／（俄罗斯）菲赫金哥尔茨著；丁寿田译．--2版．--北京：高等教育出版社，2013.3
（俄罗斯数学教材选译）
ISBN 978-7-04-035185-9

Ⅰ．①数… Ⅱ．①菲… ②丁… Ⅲ．①数学分析 Ⅳ．①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第262588号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 李 鹏 封面设计 赵 阳 版式设计 余 杨
责任校对 陈 杨 责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	北京鑫丰华彩印有限公司		http://www.landraco.com.cn
开 本	787mm × 1092mm 1/16		
印 张	23.75	版 次	1962年5月第1版
字 数	383千字		2013年3月第2版
购书热线	010-58581118	印 次	2013年3月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	59.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 35185-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从 20 世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到 "文化大革命" 前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

相关图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x，★为最新出版。

书号	书名	著译者
18303-0	微积分学教程（第一卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18304-7	微积分学教程（第二卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18305-4	微积分学教程（第三卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
★34526-1	数学分析原理（第一卷）(第 9 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
★35185-9	数学分析原理（第二卷）(第 9 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18302-3	数学分析（第一卷）(第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
20257-1	数学分析（第二卷）(第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
★34524-7	自然科学问题中的数学分析	[俄] В. А. 卓里奇
18306-1	数学分析讲义（第 3 版）	[俄] Г. И. 阿黑波夫、В. А. 萨多夫尼齐、В. Н. 丘巴里阔夫
25439-6	数学分析习题集 (根据 2010 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
31004-7	工科数学分析习题集 (根据 2006 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
29531-3	吉米多维奇数学分析习题集学习指引（第一册）	沐定夷、谢惠民 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
32356-6	吉米多维奇数学分析习题集学习指引（第二册）	谢惠民、沐定夷 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
32293-4	吉米多维奇数学分析习题集学习指引（第三册）	谢惠民、沐定夷 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
30578-4	复分析导论（第一卷）(第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
22360-6	复分析导论（第二卷）(第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
18407-5	函数论与泛函分析初步（第 7 版）	[俄] А. Н. 柯尔莫戈洛夫、С. В. 佛明
29221-3	实变函数论（第 5 版）	[俄] И. П. 那汤松
18398-6	复变函数论方法（第 6 版）	[俄] М. А. 拉夫连季耶夫、Б. В. 沙巴特
18399-3	常微分方程（第 6 版）	[俄] Л. С. 庞特里亚金
22521-1	偏微分方程讲义（第 2 版）	[俄] О. А. 奥列尼克
25766-3	偏微分方程习题集（第 2 版）	[俄] А. С. 沙玛耶夫
23063-5	奇异摄动方程解的渐近展开	[俄] А. Б. 瓦西里亚娃、В. Ф. 布图索夫
27249-9	数值方法（第 5 版）	[俄] Н. С. 巴赫瓦洛夫，Н. П. 热依德科夫，Г. М. 柯别里科夫
20525-1	代数学引论（第一卷）基础代数（第 2 版）	[俄] А. И. 柯斯特利金
21491-8	代数学引论（第二卷）线性代数（第 3 版）	[俄] А. И. 柯斯特利金
22506-8	代数学引论（第三卷）基本结构（第 2 版）	[俄] А. И. 柯斯特利金
18946-9	现代几何学：方法与应用（第一卷）曲面几何、变换群与场（第 5 版）	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯

书号	书名	著译者
21492-5	现代几何学：方法与应用（第二卷）流形上的几何与拓扑（第5版）	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
21434-5	现代几何学：方法与应用（第三卷）同调论引论（第2版）	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
18405-1	微分几何与拓扑学简明教程	[俄] А. С. 米先柯、А. Т. 福明柯
28888-9	微分几何与拓扑学习题集（第2版）	[俄] А. С. 米先柯、Ю. П. 索洛维约夫、А. Т. 福明柯
22059-9	概率（第一卷）(第3版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22555-6	概率（第二卷）(第3版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22554-9	概率论习题集	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22359-0	随机过程论	[俄] А. В. 布林斯基、А. Н. 施利亚耶夫
22634-8	随机金融基础（第一卷）事实. 模型	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
23983-6	随机金融基础（第二卷）理论	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
18403-7	经典力学的数学方法（第4版）	[俄] В. Н. 阿诺尔德
18530-0	理论力学（第3版）	[俄] А. П. 马尔契夫
22155-8	连续介质力学（第一卷）(第6版)	[俄] Л. И. 谢多夫
22633-1	连续介质力学（第二卷）(第6版)	[俄] Л. И. 谢多夫
29223-7	非线性动力学定性理论方法（第一卷）	[俄] L. P. Shilnikov 等
29464-4	非线性动力学定性理论方法（第二卷）	[俄] L. P. Shilnikov 等

目　录

《俄罗斯数学教材选译》序

第十五章　数项级数

---

§1. 导引

234. 基本概念　设给定一个无穷数 (序) 列

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\cdots,\quad a_n,\cdots,\tag{1}$$

由这些数所组成的记号

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots\tag{2}$$

叫做一个*无穷级数* (或简称*级数*), 而 (1) 中各数则称为级数的一般项. (2) 也常常利用求和号写成这样:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n;\tag{2a}$$

这里序号 n 依次取 1 至 ∞ 的一切整数值①.

我们来把级数的一般项逐一相加而组成下面这些和 (和的个数无穷):

$$\left.\begin{array}{c}A_1=a_1, A_2=a_1+a_2, A_3=a_1+a_2+a_3,\\ \cdots, A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\cdots,\end{array}\right\}\tag{3}$$

并称其为级数的*部分和*或*级数节*. 这个部分和序列 $\{A_n\}$ 我们将恒与级数 (2) 并列: 记号 (2) 的作用也就在表明该序列的产生.

级数 (2) 的部分和 A_n 在 $n\to\infty$ 时的有限或无限极限

$$A=\lim A_n$$

①但级数项的下标, 也可不由 1 开始, 而由 0 或任何大于 1 的正整数开始有时更为方便.

就叫做该**级数的和**, 并写成

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

如此使记号 (2) 或 (2a) 具有了数的意义. 如果一个级数具有有限的和, 则称其为**收敛**级数, 反之 (即和等于 $\pm\infty$ 或根本没有和时), 则称其为**发散**级数.

如此, 级数 (2) 的收敛性问题按定义就等价于序列 (3) 的有限极限的存在性问题. 反之, 任意取一个序列

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \cdots, \quad x_n, \cdots,$$

则其有限极限的存在性问题可以化为

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots, \tag{4}$$

这样一个级数的收敛性问题, 它的部分和恰好就是该序列的一般项. 此时级数之和与序列之极限合而为一.

换句话说, 无穷级数及其和的研究就是序列及其极限的研究的一种新的形式. 而这种形式, 读者可以从以后的叙述中看出, 无论在确定极限的存在还是在计算极限时都显示出难以估计的优点. 因此无穷级数在数学分析及其应用中成为一种重要的研究工具.

例 1) 无穷级数的一个极简单的例子就是 (读者所熟悉的) 几何级数:

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots,$$

它的部分和 ($q \neq 1$ 时) 是

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

如果几何级数的公比 q 的绝对值小于 1, 则 [如我们所知, **30** 段, 6)] s_n 有有限极限

$$s = \frac{a}{1 - q},$$

即该级数收敛, 而 s 是它的和.

在 $|q| \geqslant 1$ 时该几何级数给我们一个发散级数的例子. 如果 $q \geqslant 1$, 则其和将为 $+\infty$ 或 $-\infty$ (视 a 的正负号而定); 在其他情形则和根本不存在. 我们指出一个有趣的级数, 它在 $a = 1, q = -1$ 时得出:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \equiv 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots \text{[①]},$$

其部分和交错着等于 1 或 0.

① 如果级数某项 a 为负数: $a = -b$ $(b > 0)$, 则将 $\cdots + (-b) + \cdots$ 写成 $\cdots - b + \cdots$. 但要注意, 在此级数该项仍为 $-b$ 而不是 b.

2) 不难确定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

是发散的, 事实上, 级数的项虽递减而其第 n 个部分和

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

则随 n 而增至无穷.

3) 最后, 我们给出一个值得一提的例子, 它由变量

$$y_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

得出, 我们在 **49** 段已经指出这个变量趋于超越数 e. 也就是说, e 是下面无穷级数之和:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

回忆 **49** 段所讲 e 的近似计算, 从这个例子, 读者可以看出继续导入越来越小的校正数的好处, 这种好处就在于这些校正数是把用部分和数的形式表示出的 e 的近似值逐步地加以改进.

235. 简单定理 如果在级数 (2) 里舍去前 m 项, 则得一级数:

$$a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}+\cdots=\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n, \tag{5}$$

称为级数 (2) m 项后的余项.

1°. 如果级数 (2) 收敛, 则其任何余项 (5) 也收敛; 反之, 由余项 (5) 的收敛也可推出原级数 (2) 的收敛.

我们固定 m 并以 A'_k 表示级数 (5) 的第 k 部分和:

$$A'_k=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k},$$

于是显然有

$$A'_k=A_{m+k}-A_m. \tag{6}$$

如果级数 (2) 收敛而 $A_n\to A$, 则在 k 无限增大时对和 A'_k 也存在有一个有限极限

$$A'=A-A_m, \tag{7}$$

这就表示级数 (5) 是收敛的.

反之, 如果给出了级数 (5) 是收敛的而 $A'_k\to A'$, 则令 $k=n-m$ ($n>m$ 时) 而改写等式 (6) 为:

$$A_n=A_m+A'_{n-m}.$$

由此可以看出, 在 n 无限增大时, 部分和 A_n 有极限

$$A = A_m + A', \tag{8}$$

即级数 (2) 收敛.

换句话说, 在一个级数的开头舍弃其有限多项或添补一些新项, 都不会影响该级数的**性质** (指其收敛性或发散性而言).

如果级数 (5) 收敛的话, 我们将其和的记号 A' 改用 α_m 来表示, 如此可以在记号上表现出余项是由哪一项以后所取的. 于是公式 (8) 和 (7) 可改写如下:

$$A = A_m + \alpha_m, \quad \alpha_m = A - A_m. \tag{9}$$

如果 m 增至无穷, 则 $A_m \to A$ 而 $\alpha_m \to 0$. 由此:

2°. 若级数 (2) 收敛, 则其第 m 项后余项之和 α_m 随 m 的增大而趋于 0.

我们提一下收敛级数的一些简单性质:

3°. 如果收敛级数各项乘以同一倍数 c, 则级数仍保持其收敛性, 而其和则乘以 c.

事实上, 级数

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n + \cdots$$

的部分和 $\overline{A}_n$ 显然满足

$$\overline{A}_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = cA_n,$$

从而有极限 cA.

4°. 两个收敛级数

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

与

$$B = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

可**逐项**施行加或减, 所得级数

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) + \cdots$$

也收敛, 而其和分别等于 $A \pm B$.

如果 A_n, B_n 及 C_n 表示上述各级数之部分和, 则显然有

$$\begin{aligned}C_n &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = A_n \pm B_n.\end{aligned}$$

取极限得

$$\lim C_n = \lim A_n \pm \lim B_n,$$

这就证明了我们的断言.

最后, 我们注意:

5°. 收敛级数的**一般项** a_n 必趋于 0.

这可以用很初等的方法来证明: 既然 A_n 有 (因而 A_{n-1} 也有) 有限极限 A, 则

$$a_n = A_n - A_{n-1} \to 0.$$

上述命题包含了级数收敛的必要条件, 今后常常要用到它. 这个条件如不成立, 则级数必定发散. 但是要注意, 这条件对于级数的收敛性是不充分的. 换句话说, 即使实现了这个条件, 级数还是可以发散. 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

就是一个例子 [这是 **234** 段, 2) 讨论过的], 读者以后还可找到许多这类例子.

§2. 正项级数的收敛性

236. 正项级数收敛性条件 现在我们来解决如何判定级数收敛或发散的问题. 对于非负项的级数这个问题最容易解决, 为简单起见这种级数我们将简称为正项级数.

设

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

是一个正项级数, 即 $a_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 于是显然有

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geqslant A_n,$$

也就是说, A_n 是 n 的增函数. 回忆一下单调函数的极限定理 [**44** 段], 我们立即得出下列关于正项级数的基本定理:

定理 正项级数 (A) 必有和; 此和在其部分和有上界时是有限的 (因此该级数也就收敛), 在相反的情形则该和是无限的 (从而级数发散).

正项级数的所有实用的收敛和发散检验法归根到底全都建立在这个简单定理上. 但只在很少的情形下能直接应用它来判断级数的性质. 我们来举几个这种例子.

1) 试看级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

它就是所谓的调和级数[1].

显然我们有不等式:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}. \tag{1}$$

如果将该调和级数由第二项起依次分段, 每段依次为 $2,4,8,\cdots$ 项:

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{2},\quad \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{2^2},\quad \underbrace{\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{15}}_{2^3},\quad \cdots,\quad \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}}_{2^{k-1}},\quad \cdots,$$

则每段之和都将大于 $\frac{1}{2}$; 这只要在 (1) 中依次令 $n=2,4,8,\cdots,2^{k-1},\cdots$ 就可明白. 我们以 H_n 表示调和级数的第 n 个部分和, 于是显然

$$H_{2^k}>k\cdot\frac{1}{2}.$$

可见部分和无上界, 故该级数有无限和.

我们还在此提一下, H_n 随着 n 的增大而非常缓慢地增大. 例如欧拉曾算过,

$$H_{1000}=7.48\cdots,\quad H_{1000000}=14.39\cdots,\quad \text{等}.$$

以后我们还有机会对和 H_n 的增长情况作更精确的描述 [**238** 段, 4)].

2) 现在我们来看更一般的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots,$$

这里 s 是任意的实数; 它包含前一级数为其特例 ($s=1$ 时). 由于它与级数 1) 相似, 故也称为调和级数.

既然在 $s<1$ 时该级数每项都大于级数 1) 的相应项, 则在这情形部分和也当然没有上界, 所以该级数发散.

现在我们来看 $s>1$ 的情形; 为便利起见令 $s=1+\sigma$, 而 $\sigma>0$. 与 (1) 相似, 我们这次有

$$\frac{1}{n^s}+\frac{1}{(n+1)^s}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^s}<n\cdot\frac{1}{n^s}=\frac{1}{n^\sigma}. \tag{2}$$

也如前例将级数各项依次分段:

$$\underbrace{\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}}_{2},\quad \underbrace{\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}}_{2^2},\quad \underbrace{\frac{1}{8^s}+\cdots+\frac{1}{15^s}}_{2^3},\quad \cdots,\quad \underbrace{\frac{1}{(2^{k-1})^s}+\cdots+\frac{1}{(2^k-1)^s}}_{2^{k-1}},\quad \cdots,$$

由 (2) 不难证明, 这些和分别小于下列几何级数的相应项:

$$\frac{1}{2^\sigma},\quad \frac{1}{4^\sigma}=\frac{1}{2^{2\sigma}},\quad \frac{1}{8^\sigma}=\frac{1}{2^{3\sigma}},\cdots,\quad \frac{1}{(2^{k-1})^\sigma}=\frac{1}{2^{(k-1)\sigma}},\cdots.$$

---

[1] 由第二项起, 每项都是两个相邻项的调和平均数. 所谓 c 是 a 与 b 的调和平均数是指它们之间有如下关系:

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

在这种情况下, 显然无论取该级数的哪一个部分和, 它总小于常数

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^\sigma}},$$

所以该级数收敛.

237. 级数比较定理 正项级数的收敛性或发散性常常可以由跟另一个已知收敛或发散的级数的对比来确定. 这种比较法以下列简单定理为基础.

定理 1 设给了两个正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots, \tag{B}$$

如果由某项起 (比如对 $n > N$) 不等式 $a_n \leqslant b_n$ 成立, 则由级数 (B) 的收敛性可推出级数 (A) 的收敛性, 或者 —— 这是同一回事 —— 由级数 (A) 的发散性可推出级数 (B) 的发散性.

证明 因为舍弃级数的开头有限多项并不影响级数性质 [**235** 段, 1°], 我们不妨认为对 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 的一切值, 恒有 $a_n \leqslant b_n$ 而不失问题的一般性. 设 A_n 及 B_n 各表示级数 (A) 及 (B) 的部分和, 如此有

$$A_n \leqslant B_n.$$

设级数 (B) 收敛; 于是按 **236** 段的基本定理知道和数 B_n 有界:

$$B_n \leqslant L \quad (L \text{ 为常数}; \quad n = 1, 2, 3, \cdots).$$

毫无疑问, 由前一不等式我们有

$$A_n \leqslant L,$$

而这按同一定理就表示级数 (A) 是收敛的.

有时在实践上比较方便的是下面这个定理, 它是由前一定理导出的:

定理 2 如果极限

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = K^{①} \quad (0 \leqslant K \leqslant \infty)$$

存在, 则在 $K < \infty$ 时由级数 (B) 的收敛性可推知级数 (A) 的收敛性, 而在 $K > 0$ 时由级数 (B) 的发散性可推知级数 (A) 的发散性 [如此, 在 $0 < K < \infty$ 时两级数同时收敛或同时发散].

①我们在此假设 $b_n \neq 0$.

证明 设级数 (B) 收敛而 $K<\infty$. 取一任意的数 $\varepsilon>0$, 按极限的定义, 对充分大的 n 我们将有

$$\frac{a_n}{b_n}<K+\varepsilon, \quad \text{由此有} \quad a_n<(K+\varepsilon)b_n.$$

由 **235** 段, 3° 知道, 既然级数 (B) 收敛, 则逐项乘以 $K+\varepsilon$ 所得出的级数 $\sum(K+\varepsilon)b_n$ 也就收敛. 由此按前一定理推知级数 (A) 收敛.

如果级数 (B) 发散并且 $K>0$, 则在这情形反比 $\dfrac{b_n}{a_n}$ 有有限极限; 级数 (A) 应该发散, 因为, 倘若它收敛, 则按刚才所证, 级数 (B) 也就该收敛了.

最后, 我们还讲一个比较定理, 它也是第一个定理的推论.

定理 3 如果由级数某项起 (比如对于 $n>N$) 不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}\text{①} \tag{3}$$

成立, 则由级数 (B) 的收敛性可推知级数 (A) 的收敛性, 或者 —— 这是同一回事 —— 由级数 (A) 的发散性可推知级数 (B) 的发散性.

证明 如上面证明定理 1 时一样, 可认为不等式 (3) 对 $n=1,2,3,\cdots$ 的一切值都成立而不失问题的一般性. 在这情形我们有

$$\frac{a_2}{a_1}\leqslant\frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2}\leqslant\frac{b_3}{b_2}, \quad \cdots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant\frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

把这些不等式左右两边相乘, 得

$$\frac{a_n}{a_1}\leqslant\frac{b_n}{b_1} \quad \text{或} \quad a_n\leqslant\frac{a_1}{b_1}\cdot b_n \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

设级数 (B) 收敛, 则逐项乘以因数 $\dfrac{a_1}{b_1}$ 所得的级数 $\sum\dfrac{a_1}{b_1}\cdot b_n$ 也收敛. 而此时级数 (A) 按定理 1 也就收敛了, 这就是所求证的.

现在我们举几个直接应用比较定理来确定级数收敛性或发散性的例子.

238. 例 1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛, 因为

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{n!}{2^n(2n-1)!!}\leqslant\frac{1}{2^n} \quad (\text{定理 } 1)\ .$$

2) 与调和级数 [**236** 段] 比较可以决定许多级数是否收敛. 按定理 1:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 收敛: $\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$;

①在此 a_n 及 b_n 当然假设都异于 0.

(b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^p}$ $(p>0)$ 发散: 对充分大的 $n, (\ln n)^p<n$;

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛: 对充分大的 n, $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln\ln n}}<\frac{1}{n^2}$.

3) 按定理 2:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{n}(0<x<\pi)$ 发散: $\sin\frac{x}{n}\Big/\frac{1}{n}\to x$;

同样, 下面两个级数也发散:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\quad(x>0),\qquad\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)\quad(a>1);$$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ 收敛: $\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)\Big/\frac{1}{n^2}\to\frac{x^2}{2}$.

4) 最后, 我们来看级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right).$$

用微分学方法不难建立不等式:

$$\ln(1+x)<x\quad(x\neq 0,-1<x<\infty).$$

利用它我们可写:

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

同时

$$\ln\frac{n+1}{n}=-\ln\frac{n}{n+1}=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1}.$$

所以

$$0<\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}.$$

如此, 该级数是正项级数并且各项均小于收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ [**236** 段] 的相应项, 所以它是收敛的.

如果以 C 表示其和, 则部分和

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right)=H_n-\ln(n+1)\to C$$

(H_n 也如惯例表示调和级数的部分和). 这里 $\ln(n+1)$ 用 $\ln n$ 代替, 因为它们的差

$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 趋于 0. 最后: 以 γ_n 表示一个无穷小, 我们就有值得注意的关于 H_n 的公式:

$$H_n = \ln n + C + \gamma_n. \tag{4}$$

由此可看出, 在 n 无限增大时调和级数的部分和 H_n 随 $\ln n$ 而增长.

公式 (4) 中的常数 C 叫做欧拉常数. 它的数值 (由别的办法算出) 如下:

$$C = 0.577215\cdots.$$

239. 柯西检验法及达朗贝尔检验法 将所给级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

与各种已知收敛或发散的标准级数相比较, 这类"比较检验法"也能以另一种可以说是更为系统的方式来进行如下.

为了作比较, 我们一方面选取收敛几何级数

$$\sum q^n = q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots \quad (0 < q < 1),$$

另一方面选取发散级数

$$\sum 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$$

作为标准级数 (B).

把受检验的级数 (A) 按定理 1 的程序与上述两个级数作比较, 即可导出下面的检验法:

柯西检验法 我们给级数 (A) 作一个式子

$$\mathscr{C}_n = \sqrt[n]{a_n}.$$

如果在 n 充分大时不等式

$$\mathscr{C}_n \leqslant q$$

成立, 而 q 是一个小于 1 的**常数**, 则该级数收敛; 如果由某项以后有

$$\mathscr{C}_n \geqslant 1,$$

则该级数发散.

事实上, 不等式 $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ 或 $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ 分别等价于 $a_n \leqslant q^n$ 或 $a_n \geqslant 1$, 剩下只要应用定理 1 就行了①.

①当然, 级数的发散性也可以直接由收敛性的必要条件这一事实 [**235** 段, 5°] 不成立而得出.

但是, 这个检验法也常常以另一种极限的形式来应用:

我们假设, $\mathscr{C}_n$ 一式有极限 (有限或无限)

$$\lim \mathscr{C}_n = \mathscr{C}.$$

于是在 $\mathscr{C} < 1$ 时该级数收敛, 而 $\mathscr{C} > 1$ 时该级数发散.

如果 $\mathscr{C} < 1$, 则我们取一正数 ε, 小于 $1 - \mathscr{C}$, 如此也就有 $\mathscr{C} + \varepsilon < 1$. 按极限定义, 对 $n > N$ 将有

$$\mathscr{C} - \varepsilon < \mathscr{C}_n < \mathscr{C} + \varepsilon.$$

$\mathscr{C} + \varepsilon$ 一数即起上述公式中 q 的作用, 故该级数收敛.

如果 $\mathscr{C} > 1$ 而有限, 则取 $\varepsilon = \mathscr{C} - 1$, 如此 $\mathscr{C} - \varepsilon = 1$, 对充分大的 n 值这次将有 $\mathscr{C}_n > 1$, 故该级数发散. 在 $\mathscr{C} = \infty$ 时也有类似的结果.

在 $\mathscr{C} = 1$ 的情形这个检验法不能判断级数收敛与否.

如果级数 (A) 与上述标准级数按定理 3 作比较, 则导出这样一种检验法:

达朗贝尔检验法 对级数 (A) 我们来看这个比率:

$$\mathscr{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

如果在 n 充分大时, 不等式

$$\mathscr{D}_n \leqslant q$$

成立, 而 q 是一个小于 1 的**常数**, 则该级数收敛; 如果由某项以后有

$$\mathscr{D}_n \geqslant 1,$$

则该级数发散①.

但是, 比较方便的是采用这个检验法的极限形式:

设比率 $\mathscr{D}_n$ 有极限 (有限或无限):

$$\lim \mathscr{D}_n = \mathscr{D}.$$

于是在 $\mathscr{D} < 1$ 时该级数收敛, 而在 $\mathscr{D} > 1$ 时该级数发散.

证明与柯西检验法相同.

这个检验法在 $\mathscr{D} = 1$ 时也不能给出任何结论.

附注 我们对所说的检验法仍照习惯保持达朗贝尔的名字. 但事实上达朗贝尔对级数的收敛性及以部分和极限作级数之和两点并未有明白的观念. 达朗贝尔引以为戒的是, 不要采用后项与前项之比绝对值大于 1 的级数, 他认为这种级数是"错误"的. 为了使级数"好而不错误", 他

① 这里发散性也可直接由收敛性必要条件不成立而推出: 试看, 如果 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ 即 $a_{n+1} \geqslant a_n$, 则 a_n 不能趋于 0.

只要求所说的比率终于 (依绝对值) 成为小于一. 要注意我们上面所要求的却与此不同, 即, 要该比率小于一个固定真分数 q! 按现代的意义达朗贝尔的条件对级数的收敛是不充分的: 例如, 大家所知道发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 也是满足该条件的.

该检验法最初由柯西以极限的形式明确地陈述出来并且给了证明.

例 1) 设给了一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 对此自然宜施用柯西检验法:

$$\mathscr{C}_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n, \quad \mathscr{C}=\frac{1}{e}<1,$$

如此该级数收敛.

2) 应用达朗贝尔检验法于下列级数:

(a) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(x>0);\quad \mathscr{D}_n=\frac{x}{n+1},\quad \mathscr{D}=0,$

这个级数不论 x 值如何都是收敛的;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n\quad(x>0);\quad \mathscr{D}_n=\frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},\quad \mathscr{D}=\frac{x}{e},$

这个级数在 $x<e$ 时收敛, 而在 $x>e$ 时发散; 在 $x=e$ 时, 达朗贝尔检验法的极限形式不能给出什么结论; 但既然 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$, 因而恒有 $\mathscr{D}_n>1$, 则此级数仍然发散.

3) 对调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots\quad(s>0)\quad(\mathrm{H}_s)$$

上述诸检验法不适用. 事实上, 在这种情况下 $\mathscr{C}_n=\frac{1}{n^{s/n}}<1$, 但 $\lim\mathscr{C}_n=1$, 因为

$$\ln\mathscr{C}_n=-s\cdot\frac{\ln n}{n}\to 0\quad[\mathbf{121}\text{ 段}, 3)].$$

同样虽然 $\mathscr{D}_n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s}<1$, 但显然 $\lim\mathscr{D}_n=1$.

但是由别的想法 [**236** 段] 我们知道, 调和级数在 $s>1$ 时收敛, 而在 $s\leqslant 1$ 时发散.

240. 拉比检验法 在上述诸检验法不能给出答案的那些情形下, 则不得不采取较复杂的检验法, 它们建立在被检验级数与别的比几何级数收敛得 "慢" 或发散得 "慢" 的标准级数的对比上.

我们在此再讨论一种拉比[1]检验法, 它的实质就是将所给级数 (A) 与调和级数 (H_s) 作比较. 此时要考察这样一个式子:

$$\mathscr{R}_n=n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

[1] Joseph Ludwig Raabe (1801—1859) 是德国数学家.

拉比检验法 如果 n 充分大时, 不等式

$$\mathscr{R}_n \geqslant r$$

成立而 r 是一个大于 1 的**常数**, 则该级数收敛; 如果由某项以后

$$\mathscr{R}_n \leqslant 1,$$

则该级数发散.

如此, 设在 n 充分大时, 我们有

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant r > 1 \quad \text{或} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1-\frac{r}{n}.$$

现在我们在 1 与 r 之间取任意一数 $s: 1 < s < r$. 因为按一个已知的极限关系 [第 **65** 段, 3)] 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^s - 1}{-\dfrac{1}{n}} = s,$$

于是对充分大的 n 将有 [**36** 段, 1°]

$$\frac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^s - 1}{-\dfrac{1}{n}} < r \quad \text{或} \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)^s > 1-\frac{r}{n},$$

所以

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(1-\frac{1}{n}\right)^s.$$

这不等式也可写成

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n-1}{n}\right)^s = \frac{\dfrac{1}{n^s}}{\dfrac{1}{(n-1)^s}}.$$

右边我们有收敛级数 $(\mathrm{H}_s)(s > 1!)$ 的两个相邻项之比; 应用定理 3, 就证明了级数 (A) 的收敛性.

如果由某项以后

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1,$$

则由此立即可得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n-1}{n} = \frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n-1}}.$$

应用定理 3 到级数 (A) 与发散级数 (H_1) 上我们就得出级数 (A) 发散的结论.

拉比检验法也主要以极限形式来应用.

设 $\mathscr{R}_n$ 有极限 (有限或无限)

$$\lim \mathscr{R}_n = \mathscr{R}.$$

于是在 $\mathscr{R} > 1$ 时该级数收敛, 而在 $\mathscr{R} < 1$ 时该级数发散.

达朗贝尔检验法与拉比检验法比较起来, 我们可看出后者显著强于前者. 如果极限 $\mathscr{D} = \lim \mathscr{D}_n$ 存在且异于 1, 则 $\mathscr{R}_n = n(1 - \mathscr{D}_n)$ 有一极限 $\mathscr{R}$, 在 $\mathscr{D} < 1$ 时它等于 $+\infty$ 而在 $\mathscr{D} > 1$ 时它等于 $-\infty$. 如此, 若达朗贝尔检验法能对一给定级数收敛与否给出答案, 则拉比检验法更不成问题能给出答案; 进一步说, 所有这些情形都被 $\mathscr{R}$ 的两个可能值即 $\pm\infty$ 所包括了, 如此, 所有其他 $\mathscr{R}$ 值 (除 $\mathscr{R} = 1$ 外) —— 它们也能给出收敛性问题的答案 —— 相应于达朗贝尔检验法不能给出答案的那些情形, 因为此时 $\mathscr{D} = 1$.

作为应用拉比检验法的例子, 我们来看这个级数:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

达朗贝尔检验法在这个级数上是不适用的, 因为 $\mathscr{D}_n = \dfrac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} \to 1$ (并且 $\mathscr{D}_n < 1$). 于是我们来作出拉比的式子:

$$\mathscr{R}_n = n\left(1 - \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\right) = \frac{6n-1}{2(2n+1)}.$$

由于 $\mathscr{R} = \lim \mathscr{R}_n = \dfrac{3}{2} > 1$, 故该级数收敛.

但是在 $\mathscr{R} = 1$ 时我们又得不出级数收敛与否的答案了. 在这种情形 (很稀少) 还需采取更敏感而复杂的检验法.

241. 麦克劳林 – 柯西积分检验法 最后我们还来导出一种检验法, 形式与所有以前各种都不同.

设所给出的级数有这样的形式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \tag{5}$$

这里 $f(n)$ 是某函数 $f(x)$ 在 $x = n$ 时的值, 这函数在 $x \geqslant 1$ 时有定义①; 我们还假设这函数是连续的、正的并且单调下降的.

我们来看 $f(x)$ 的任何一个原函数:

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

①序号 n 的初值也可不取 1 而取任何别的正整数 n_0, 于是函数 $f(x)$ 需考虑其在 $x \geqslant n_0$ 时的情形.

由于它的导函数 $F'(x) = f(x) > 0$, 则 $F(x)$ 随 x 而增大, 并且在 $x \to \infty$ 时一定有一极限 L, 有限或无限 [第 **47** 段]. 按照这两种不同情形就建立了下面的收敛和发散检验法, 它于 1742 年就已以几何形式由麦克劳林说出来, 但一直未引人注意, 到 1827 年才重新被柯西所发现.

积分检验法 *级数 (5) 在原函数 $F(x)$ 的极限 L 有限时收敛, 在 L 无限时发散.*

显然, 无论对哪一个原函数来说都是一样的, 因为两个原函数之间只差一个常数; 我们令

$$F(x) = \int_1^x f(x)dx. \tag{6}$$

既然函数 $f(x)$ 是单调的, 则对 $n \leqslant x \leqslant n+1$ 有

$$a_{n+1} = f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n) = a_n,$$

如此也有

$$a_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(x)dx \leqslant a_n.$$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)dx$$

而言, 其第 n 部分和为

$$\int_1^{n+1} f(x)dx = F(n+1).$$

显然, 这个级数收敛还是发散取决于 L 是有限还是无限. 在 L 有限时, 按 "比较定理" 1 [**237** 段], 具较小项的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 收敛, 从而级数 (5) 也就收敛; 反之, $L = \infty$ 时具较大项的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 也即级数 (5), 自必发散无疑.

例 1) 我们首先再来看调和级数:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1).$$

在情形 (a):

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad F(x) = \int \frac{dx}{x} = \ln x \to \infty \quad (x \to \infty\text{时}),$$

故该级数发散.

在情形 (b):

$$f(x) = \frac{1}{x^s}, \quad F(x) = \int \frac{dx}{x^s} = -\frac{1}{s-1} x^{-(s-1)} \to 0 \quad (x \to \infty\text{时}),$$

故该级数收敛.

这些结果在 [**236** 段] 已经知道, 我们再补充一个新的:

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

这里

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}, \quad F(x) = \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \ln \ln x \to \infty \quad (\text{在} x \to \infty \text{时}),$$

故该级数发散.

积分 (6) 在 $x \to \infty$ 时的极限叫做由 1 至 ∞[①]的积分, 并表示为

$$F(\infty) = \int_1^{\infty} f(x)dx.$$

如此, *级数 (5) 收敛还是发散就取决于这个积分值有限还是无限*.

在这种形式之下, 积分检验法可以有一种接近麦克劳林的观念的简单几何解释. 如果用曲线表出函数 $f(x)$(图 1), 则积分 $F(x)$ 将表示这曲线与 x 轴及两纵坐标线所围的面积; 积分 $F(\infty)$ 则在某种意义上可以看作整个向右伸展的曲线下图形的面积. 另一方面, 级数 (5) 的项 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 表示在 $x = 1, 2, \cdots, n, \cdots$ 各点上的纵坐标, 也可以说是以 1 为底、以上述各纵坐标为高的各矩形的面积.

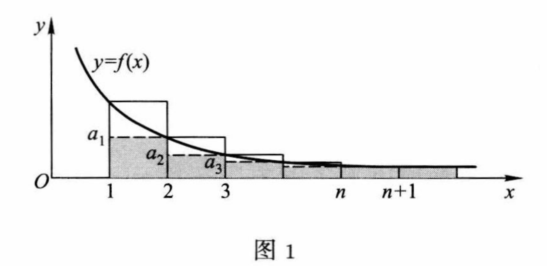


图 1

如此, 级数 (5) 之和无非就是外矩形面积之和, 而与内矩形之和相差只在第一项. 这使得上面所建立的结果成为一目了然的事情: 如果曲线图形的面积是有限的, 则更不待言, 其所包含的阶梯状图形面积也是有限的, 故该级数收敛; 若曲线面积无限, 则包含它的阶梯状图形面积也无限, 故在此情形该级数发散.

§3. 任意级数的收敛性

242. 收敛性原理 现在来讨论各项有任意正负号的级数的收敛性问题. 我们知道 [**234** 段], 按定义级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m} + \cdots$$

①这是所谓*反常积分*, 这类积分我们将在第十七章里讲.

的收敛性问题就是部分和序列

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, A_{n+1}, \cdots, A_{n+m}, \cdots \tag{1}$$

的有限极限存在问题. 在 **52** 段已经建立了序列的收敛原理, 给出了这种极限存在的一般充要条件 (充分而必要的条件). 这个适用于序列 (1) 的原理现在可另行陈述如下:

要级数 (A) 收敛, 其必要而充分的条件是要对每个实数 $\varepsilon > 0$ 都有这样一个序号 N 与之相应, 使在 $n > N$ 时不等式

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon \tag{2}$$

(对一切 $m = 1, 2, 3, \cdots$)恒成立①.

(这里 $n+m$ 起着 **52** 段里第二指标 n' 的作用, 它是与 n 独立的, 可以取为大于 n 而不失一般性.)

如果假设该级数收敛, 而在不等式 (2) 里特别令 $m = 1$, 则得

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \quad (n > N \text{ 时}),$$

如此 $a_{n+1} \to 0$, 也即 $a_n \to 0$, 而化为 **235** 段, 5° 的必要条件. 它本身还不能保证级数的收敛, 而这正是因为它远未用尽上述条件的这种含义: 不但要级数充分远的项能分别地小到任何程度, 并且还要无论取多少个这种项之和也能小到任何程度. 对这情形调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是一个很好的例证, 在这级数里通项 $\left(= \frac{1}{n}\right)$ 趋于 0, 可是如果在这项后面再取 $n-1$ 个项, 则总和终于 $> \frac{1}{2}$ [**236** 段, (1)].

243. 绝对收敛性 因为直接应用收敛原理常常会引起困难, 那么我们值得来研究一下那几类能以较简单方法解决问题的情形.

我们在上一节已经看到, 正项级数的收敛性大部分都不难确定, 因为有一系列方便的检验法. 因此我们自然想到首先来考虑所给级数的收敛性问题能化为正项级数收敛性问题的那些情形.

如果一个级数的各项不全是正的, 但由某处以后成为正的, 则只要舍弃该级数开头充分多项 [**235** 段, 1°] 就可化为正项级数的问题来研究. 如果一个级数的各项全是负的, 或至少由某处以后全成为负的, 则只要改变所有各项的符号就可化为所讨论过的情形 [**235** 段, 3°]. 如此, 本质上新鲜的情形就是那种正项与负项都多至无穷的级数.

定义 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

①这个条件的创始人波尔查诺及柯西也都是针对着无穷级数收敛性问题给出这个条件来的.

与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \tag{A*}$$

同时收敛, 则级数 (A) 称为**绝对**收敛的.

于是我们有这个

柯西定理 只要由级数 (A) 各项绝对值所成的级数 (A*) 收敛, 则级数 (A) 也就收敛.

证明可立即由收敛性原理得出: 不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}|$$

告诉我们, 如果收敛条件对级数 (A*) 成立, 则对级数 (A) 也就更会成立.

也可以这样证明: 我们分别考虑级数 (A) 的正项及其负项的绝对值. 按在级数 (A) 中出现的次序分别改编它们的序号, 如此做出两个 (正项的) 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + \cdots \quad \text{(B)}, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} c_m = c_1 + c_2 + \cdots \quad \text{(C)}.$$

由级数 (A*) 的收敛性可推知这两个级数都收敛. 事实上, 这两个级数的任何部分和 B_k 或 C_m 总是小于级数 (A*) 的某一个部分和, 所以保持小于该级数之和 A^* [**236** 段].

如果现在取级数 (A) 的部分和 A_n, 则可表之为差数的形式:

$$A_n = B_k - C_m,$$

这里 k 及 m 各表示和数 A_n 中正项或负项的数目, 如此 k 及 m 与 n 有关而随 n 增至无穷①. 于是显然存在有限的极限

$$A = \lim A_n = B - C, \tag{3}$$

这里 B 及 C 各为级数 (B) 及 (C) 之和, 而级数 (A) 的收敛性被证明了. 顺便还证明了这一有用的事实: 在所作假设之下, 所给级数之和就等于单由正项所组成级数之和与单由负项绝对值所组成级数之和间的差数.

如此, 单是级数 (A*) 的收敛性就足使级数 (A)绝对收敛.

下面将看到, 可能有这样的情形: 级数 (A) 收敛, 而级数 (A*) 不收敛. 此时级数 (A) 称为**非绝对**收敛的.

要确定级数 (A) 的绝对收敛性, 可以应用所在前段讨论过的收敛性检验法于正项级数 (A*). 但对发散性的检验法却要小心: 即使级数 (A*) 发散时级数 (A) 仍然可以收敛 (非绝对). 可是柯西和达朗贝尔检验法是例外, 因为当它们肯定级数 (A*)

①我们永远指的是级数 (A) 中正项及负项都有无限多的情形.

发散时, 就表示级数 (A*) 的通项 $|a_n|$ 不趋于 0[①], 于是 a_n 也就不趋于 0, 如此级数 (A) 也就必须发散. 所以上述检验法可以稍加修改使适合于任意级数. 例如达朗贝尔检验法可理解如下:

达朗贝尔检验法 设对比率 $\mathscr{D}_n^* = \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ 存在确定的极限:

$$\mathscr{D}^* = \lim \mathscr{D}_n^*;$$

于是在 $\mathscr{D}^* < 1$ 时所给级数 (A) **绝对**收敛, 而在 $\mathscr{D}^* > 1$ 时它发散.

例 1) 我们来应用达朗贝尔检验法到 **239** 段, 2) 里所讲过的级数 (a) 及 (b) 上, 但舍去 $x > 0$ 这个条件. 我们得到,

(a) 该级数对一切 x 值都绝对收敛;

(b) 该级数在 $-e < x < e$ 时绝对收敛, 并且在 $x \geqslant e$ 或 $x \leqslant -e$ 时发散 (在 $x = \pm e$ 时则收敛的必要条件不成立).

2) 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \pm \frac{x^n}{n} \mp \cdots,$$

我们有

$$\mathscr{D}_n^* = \frac{n}{n+1}|x|, \quad \mathscr{D}^* = |x|,$$

如此该级数在 $|x| < 1$ 时绝对收敛, 在 $|x| > 1$ 时发散. 在 $x = -1$ 时该级数也发散, 因为得到了各项都变为负号的调和级数. 在 $x = 1$ 时我们导出级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots,$$

对其收敛性问题留待下面解决.

244. 交错级数 用前段的想法, 最多只能确定级数的绝对收敛性 —— 对非绝对收敛级数则它们显然不能适用. 所以我们最后来讨论一类特殊的但又重要的级数, 所谓交错级数, 其中也有非绝对收敛的.

所谓**交错**级数就是各项正负号轮流出现的级数.

交错级数宜写成: 使各项的正负号明白显出的形式, 例如 (所有 c_n 都算作正的),

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^{n-1}c_n + \cdots. \tag{4}$$

关于这类级数早在 1714 年莱布尼茨 (在其致约翰 · 伯努利的信中) 已给出过下面这简单的定理.

莱布尼茨定理 如果交错级数 (4) 各项绝对值单调递减:

$$c_{n+1} < c_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{5}$$

① 参看 **239** 段中的两个脚注.

并趋于 0:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0,$$

则该级数收敛.

证明 偶数个项的部分和 C_{2m} 可以写成这样:

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2m-1} - c_{2m}).$$

因为由 (5) 知每个括号都是正数, 故由此显然, m 增大时部分和 C_{2m} 也增大. 另一方面, 如果把 C_{2m} 写成这样:

$$C_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m},$$

则不难看出, C_{2m} 保持上方有界:

$$C_{2m} < c_1.$$

在这情形, 按关于单调变量的定理 [**44** 段], 在 m 无限增大时部分和 C_{2m} 有一个有限的极限

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m} = C.$$

至于奇数个项的部分和 C_{2m-1}, 则我们显然有 $C_{2m-1} = C_{2m} + c_{2m}$. 既然通项趋于 0, 则有

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m-1} = C.$$

由此可见 C 就是该级数之和.

附注 我们已看到偶数个项的部分和 C_{2m}递增而趋近于级数之和 C. 把 C_{2m-1} 写成

$$C_{2m-1} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1})$$

的样子, 则不难确定, 奇数个项的部分和递减而趋近于 C. 如此恒有

$$C_{2m} < C < C_{2m-1}.$$

特别地, 可以断定

$$0 < C < c_1. \tag{6}$$

这可以给该级数余项一个很简单而方便的估计 (该余项本身是交错级数), 即

$$\gamma_n = (-1)^{n-1}\{c_n - c_{n+1} + \cdots\}.$$

由 (6) 知括号内是正数且小于 c_n.

如此, 在所有情形下, 莱布尼茨型级数[①]的余项与其第一项有相同的符号, 并且依绝对值小于该项.

[①]我们用这个名称来指满足莱布尼茨定理条件的交错级数.

这个附注在用级数作近似计算时常常用到 [参看 **260** 段].

莱布尼茨型级数的最简单例子有: 下列

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$

与

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \cdots$

两级数的收敛性都可由所证明的定理推知.

同时由各项绝对值所组成的级数则发散: 对级数 (a) 这就是调和级数, 对级数 (b) 则得级数

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots,$$

其发散性可由其部分和看出:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}H_n.$$

如此, 级数 (a) 及 (b) 给出了*非绝对收敛级数*的最先两个例子. [以下我们将确定, 第一个级数之和是 $\ln 2$, 而第二个级数之和是 $\frac{\pi}{4}$ (参看第 **256** 段, (22) 及第 **255** 段, (20)).]

§4. 收敛级数的性质

245. 可结合性 无穷级数和的概念与 (算术及代数中所讲的) 有限多项和的概念主要差别在于前者含有*极限过程*. 虽然寻常和的某些性质也可搬到无穷级数和上来, 但常常只限于满足某些条件的时候, 这些条件就是现在要讲的. 在另外一些情形显著地违反了我们常见的和的性质, 因此一般说来, 对这问题是应该保持谨慎的.

我们来看收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \tag{A}$$

其部分和序列

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \tag{1}$$

收敛于级数的和 A. 我们将该级数各项任意归组而不变其先后次序:

$$a_1 + \cdots + a_{n_1}, \quad a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}, \cdots, \quad a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}, \cdots,$$

这里 $\{n_k\}$ 是一个由正整数列中抽出来的部分递增序号序列.

定理 *由上述这些和所组成的级数*

$$(a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots \tag{$\widetilde{\text{A}}$}$$

恒与原级数收敛于同一和 A. 换句话说: *收敛级数具有***可结合性**.

事实上, 新级数的部分和序列

$$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_k, \cdots$$

无非就是序列 (1) 的部分序列

$$A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots, A_{n_k}, \cdots,$$

所以收敛于同一极限 A.

至今我们所看到的是与寻常和完全相似之处; 但如果以相反次序来试用可结合性, 这一相似性就被破坏了. 如果给了一个收敛级数 ($\tilde{\mathrm{A}}$), 其每项各为有限多项之和, 则去括号后我们得出一个新级数 (A), 它却可能是发散的. 这里是一个简单的例子: 级数

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

显然是收敛的, 但去括号所得级数

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

却成为发散的.

当然, 如果去括号后我们得到一个**收敛**级数 (A), 则其和与级数 ($\tilde{\mathrm{A}}$) 相同. 这可由上面证明的事实推出.

附注 在某些条件下可以保证级数 (A) 收敛. 最简单的情形是, 当 ($\tilde{\mathrm{A}}$)中所有在同一括号内诸项都有相同符号的时候①.

事实上, 这时候当 n 由 n_{k-1} 变至 n_k 时部分和 A_n 将单调地变化, 所以将被包含在 $A_{n_{k-1}}=\tilde{A}_{k-1}$ 与 $A_{n_k}=\tilde{A}_k$ 之间. k 充分大时, 这些和与级数 ($\tilde{\mathrm{A}}$) 之和 $\tilde{A}$ 相差可任意地小, 所以这对于和 A_n 也正确 —— 即 n 充分大时, 有 $A_n \to \tilde{A}$.

246. 绝对收敛级数的可交换性 设给定一个收敛级数 (A), 其和为 A. 在其中任意调换各项位置, 得到一个新的级数:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_k + \cdots, \tag{A$'$}$$

这级数的每一项 a'_k 各与原级数某一个确定项 a_{n_k} 相同②.

于是发生一个问题: 级数 (A′) 是否收敛, 并且在收敛的情形是否等于原级数之和 A? 在考虑这问题的时候我们必须严格区别绝对收敛级数与非绝对收敛级数.

狄利克雷③定理 如果级数 (A) **绝对**收敛, 则由调动它的各项位置所得的级数 (A′) 也收敛并且与原级数有同一总和 A. 换句话说, **绝对**收敛级数具有可**交换性**.

①这括号与括号之间, 正负号可以不同.

②这里序列 $\{n_k\}$ 就是无遗漏地无重复地重写正整数列 —— 只是次序不同.

③Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805—1859) 是德国数学家.

证明 我们分两步来证明.

(a) 先假设级数 (A) 是正的.

我们来看级数 (A′) 的任意一个部分和 A'_k. 既然

$$a'_1 = a_{n_1}, \quad a'_2 = a_{n_2}, \quad \cdots, \quad a'_k = a_{n_k},$$

则取 n' 大于所有序号 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 时我们显然将有 $A'_k \leqslant A_{n'}$, 所以更不成问题有

$$A'_k \leqslant A.$$

在这样的情形 (A′) 将收敛 [**236** 段], 而其和 A' 不超过 A:

$$A' \leqslant A.$$

但级数 (A) 也可由级数 (A′) 调动各项位置得出, 所以同样有:

$$A \leqslant A'.$$

结合所得两个关系我们就得出所要求的等式:

$$A' = A.$$

(b) 现在设 (A) 是任意的绝对收敛级数.

因为按照所证明的, 正项收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \qquad (\mathrm{A}^*)$$

在各项调动位置后仍保持收敛, 故按 **243** 段的定理, 级数 (A) 此时也保持其 (绝对) 收敛性.

其次, 我们在 **243** 段看到, 级数 (A) 绝对收敛时其和可表示成:

$$A = B - C,$$

这里 B 及 C 是正项级数 (B) 及 (C) 之和, 它们是分别由级数 (A) 的正项及负项绝对值组成的. 调动级数 (A) 各项位置时这两个级数的项也跟着调动, 但按所证明的并不影响其和 B 及 C. 所以级数 (A) 之和仍如先前, 这就是所要证明的.

247. 非绝对收敛级数的情形 现在转而讨论非绝对收敛级数并且来证明它们没有可交换性.

我们先作一准备笺注. 假设级数 (A) 收敛, 但非绝对收敛. 由收敛性有 $\lim a_n = 0$ [**235** 段, 5°]. 至于前段所提到的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad (\mathrm{B}), \quad \sum_{m=1}^{\infty} c_m \quad (\mathrm{C}),$$

则虽然明显

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0 \quad 并且 \quad \lim_{m\to\infty} c_m = 0, \tag{2}$$

但在当前情形它们都是发散的. 事实上, 如果在级数 (A) 开头 n 项中有 k 项正的、m 项负的, 则

$$A_n = B_k - C_m, \quad A_n^* = B_k + C_m.$$

第二个等式告诉我们, 两个级数 (B) 与 (C) 不能同时收敛, 因为否则级数 (A*) 也将收敛而和假设矛盾. 但由第一个等式我们看出, 如果这两个级数有一个收敛而另一个不收敛, 则级数 (A) 将发散, 这也和假设矛盾.

现在来证明下面这个有趣的定理:

黎曼定理 如果级数 (A) **非绝对**收敛, 则无论预先取一个怎样的数 L, 无论有限或为 $\pm\infty$, 总能将这级数各项调动位置而使变换后的级数有和 L.

证明 我们先来讲 L 有限的情形. 由 235 段, 1°, 级数 (B) 与 (C) 的所有余项也将发散, 如此在每一级数中由任何一项开始必能取出充分多的项使其和超过任何数.

利用这一点, 我们将级数 (A) 诸项调动如下.

我们先按该级数中原来次序抽取充分多个正项, 使其和超过 L:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1} > L.$$

在它们之后接着 (按级数中原来次序) 写出充分多负项, 使总和变成小于 L:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1} - c_1 - c_2 - \cdots - c_{m_1} < L.$$

然后又由剩下的各项里抽取正项来写在后面, 使得

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1} - c_1 - \cdots - c_{m_1} + b_{k_1+1} + \cdots + b_{k_2} > L.$$

然后再取充分多负项使得

$$b_1 + \cdots + b_{k_1} - c_1 - \cdots - c_{m_1} + b_{k_1+1} + \cdots + b_{k_2} - c_{m_1+1} - \cdots - c_{m_2} < L.$$

如此进行下去. 这步骤我们设想其延续无穷; 显然级数 (A) 的每项连同其正负号都将于一定位置出现.

如果每次写出 b 或 c 时所取项数都恰好能够使所要求的不等式实现为止, 则与 L 正或负的偏差的绝对值不会超过最后所写的一项. 于是由 (2) 显然可见级数

$$\begin{aligned}&(b_1 + \cdots + b_{k_1}) - (c_1 + \cdots + c_{m_1}) + \cdots \\ &+(b_{k_{i-1}+1} + \cdots + b_{k_i}) - (c_{m_{i-1}+1} + \cdots + c_{m_i}) + \cdots\end{aligned}$$

收敛于和 L. 由 **245** 段附注知道, 这在去掉括号后仍然正确.

如果 $L=+\infty$, 则可以如此来取各组正数, 使逐次的和大于 $1,2,3$, 等等, 而在每组正数之后则只附加一个负项. 这样显然可以做成一个具有总和 $+\infty$ 的级数. 同样方式也可以得出一个具有总和 $-\infty$ 的级数.

所建立的结果阐明了这一事实: 非绝对收敛性的实现只由于正负项的相互抵消, 因此主要地取决于各项的先后次序, 但绝对收敛性则建立在这些项的下降速度上而与其次序无关.

例 我们来看这个显然非绝对收敛的级数:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}}+\cdots, \tag{3}$$

其和我们稍后将知道是 $\ln 2$[①]. 调动它的项使每个正项之后跟着两个负项:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}}+\cdots, \tag{4}$$

于是可确定这级数之和经这样调动后减少一半.

事实上, 如果分别以 A_n 及 A'_n 表示这两个级数的部分和, 则

$$\begin{aligned} A'_{3m}&=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)\\ &=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}A_{2m}, \end{aligned}$$

如此 $A'_{3m}\to\dfrac{1}{2}\ln 2$. 因为

$$A'_{3m-1}=A'_{3m}+\frac{1}{4m} \quad 与 \quad A'_{3m-2}=A'_{3m-1}+\frac{1}{4m-2}$$

趋于同一极限 $\dfrac{1}{2}\ln 2$, 故级数 (4) 收敛而其和即为此数.

248. 级数乘法 关于收敛级数逐项加、减或乘以同一常数倍数, 在 **235** 段, 3° 及 4° 已经讲过. 现在来讲两级数的相乘问题.

设给定两个收敛级数:

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{A}$$

及

$$B=\sum_{m=1}^{\infty}b_m=b_1+b_2+\cdots+b_m+\cdots. \tag{B}$$

仿照有限和的乘法, 我们在此要把两级数的项全都一对一对地乘起来, 将所有可能的乘积 a_ib_k 列成无限矩阵如下:

[①] 这里对我们重要的只是这个和不是 0 [**244** 段, (6)].

$$
\begin{array}{|llllll}
a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots & a_ib_1 & \cdots \\
a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots & a_ib_2 & \cdots \\
a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_ib_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_1b_k & a_2b_k & a_3b_k & \cdots & a_ib_k & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots .
\end{array} \tag{5}
$$

这些乘积能以种种方法排列成单行的序列.

例如, 柯西首先做过, 这些乘积可以沿对角线来写成序列:

$$
\begin{array}{|llll}
a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots \\
a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots \\
a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots ,
\end{array}
$$

同时将对角线上诸项合并起来:

$$
\begin{aligned}
&a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \cdots \\
&+(a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1) + \cdots .
\end{aligned} \tag{6}
$$

柯西定理 如果级数 (A) 与 (B) 都绝对收敛, 则由乘积 (5) 所组成的级数 (6) 也收敛, 并且其和就是该二级数和之积 AB.

证明 按假设, 级数

$$
\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \tag{A*}
$$

与

$$
\sum_{m=1}^{\infty} |b_m| = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_m| + \cdots \tag{B*}
$$

收敛, 即有有限的和, 比如说 A^* 与 B^*. 如果对这两个级数做出一个像 (6) 那样的级数:

$$
\begin{aligned}
&|a_1|\cdot|b_1| + (|a_1|\cdot|b_2| + |a_2|\cdot|b_1|) + (|a_1|\cdot|b_3| \\
&+|a_2|\cdot|b_2| + |a_3|\cdot|b_1|) + \cdots + (|a_1|\cdot|b_n| \\
&+|a_2|\cdot|b_{n-1}| + \cdots + |a_{n-1}|\cdot|b_2| + |a_n|\cdot|b_1|) + \cdots ,
\end{aligned} \tag{6*}
$$

则它显然收敛, 因为它的第 n 个部分和小于

$$(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)(|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|)<A^*B^*$$

[**236** 段]. 在这情形如果解除 (6^*) 中的括号, 收敛性仍然保持 [参看 **245** 段附注]. 因此 [**243** 段] 由 (6) 解除括号所得的级数

$$a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+\cdots$$

也收敛并且绝对收敛. 在这情形它不但具有可结合性, 也具有可交换性 [**245**, **246** 段]. 它的和 —— 与级数 (6) 之和相同 —— 可以简单地决定如下. 我们将它的各项不是沿对角线排列而是沿正方形排列:

$$\begin{array}{cccc}
a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots \\
a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots \\
a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots,
\end{array}$$

并且把各方块不同的部分逐组合并起来:

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1)+\cdots. \tag{7}$$

级数 (7) 的部分和为

$$A_1B_1,\quad A_2B_2,\quad A_3B_3,\cdots,\quad A_nB_n,\cdots$$

(这里如惯例以 A_n, B_n 表示级数 (A) 与 (B) 的部分和); 它们趋于乘积 AB, 如此它不但是级数 (7) 之和, 也是级数 (6) 之和.

例 1) 将级数

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\quad(|x|<1)$$

自乘起来得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots.$$

2) 我们已经知道 [**243** 段, 1) (a)], 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

是对一切 x 值都绝对收敛的. 以 $E(x)$ 表其和, $E(x)$ 与 $E(y)$ 的乘积可以按级数乘法法则来求. 乘积的通项如下:

$$\begin{aligned}
&1\cdot\frac{y^n}{n!}+\frac{x}{1!}\cdot\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{y^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cdot 1\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}x^ky^{n-k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^kx^ky^{n-k}=\frac{(x+y)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

如此关于函数 $E(x)$ 得出这样一个关系:

$$E(x) \cdot E(y) = E(x+y).$$

[以后我们会知道, $E(x) = e^x$.]

3) 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

按莱布尼茨定理是收敛的, 但非绝对收敛 [**234** 段, 2)]. 如果仍然按柯西法则自乘起来则得一级数, 其通项为

$$(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{n-k+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\right).$$

因为括号里每项都大于 $\frac{1}{n}$, 则全式绝对值 > 1, 并且由于不满足收敛性必要条件知该级数发散. 这个例子也属于柯西.

附注 如果两个收敛级数 (A) 与 (B) 至少有一个绝对收敛, 则柯西法则还是有效. 只有当两个互乘级数都非绝对收敛 (如前例) 时其乘积才会发散.

§5. 无穷乘积

249. 基本概念 如果

$$p_1, \quad p_2, \cdots, \quad p_n, \cdots \tag{1}$$

是一个给定的数列, 则由此所做成的记号

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ \cdots \ \cdot p_n \cdot \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{①} \tag{2}$$

叫做无穷乘积.

将 (1) 中之数依次相乘, 做出部分乘积

$$P_1 = p_1, \quad P_2 = p_1 \cdot p_2, \quad P_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, \cdots, P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ \cdots \ \cdot p_n, \cdots, \tag{3}$$

这个部分乘积序列 $\{P_n\}$ 将经常与记号 (2) 对照.

部分乘积 P_n 在 $n \to \infty$ 时的有限或无限极限 P

$$\lim P_n = P$$

叫做无穷乘积 (2) 的**值**, 并且写成

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ \cdots \ \cdot p_n \cdot \ \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n.$$

① 记号 $\prod$ 就是表示乘积.

如果一个无穷乘积有**有限的**值 P 而不等于 0, 则该乘积称为**收敛的**, 在相反的情形则称为**发散的**①.

只要乘积中有一乘数是 0, 则乘积的值也就等于 0. 以下我们把这情形除外, 而恒设 $p_n \neq 0$.

读者不难建立与级数的相似性 [**234** 段], 并且看出 (与级数相似) 无穷乘积的研究只是序列及其极限的研究的一种特殊的形式. 这种形式是值得熟悉的, 因为在许多情形下它比别的表示法方便.

例 1) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

因为部分乘积

$$P_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2},$$

则该无穷乘积收敛, 而其值为 $\frac{1}{2}$.

2) 沃利斯公式 [**188** 段]

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

显然等价于 $\frac{\pi}{2}$ 的分解为无穷乘积

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\cdots.$$

由它可导出公式

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right]=\frac{\pi}{4},\quad \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4m^2}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

250. 简单定理 · 与级数的关系 舍弃无穷乘积 (2) 里的开头 m 项我们得出残积

$$\pi_m=p_{m+1}\cdot p_{m+2}\cdot\cdots\cdot p_{m+k}\cdot\cdots=\prod_{n=m+1}^{\infty}p_n,\tag{4}$$

它完全与无穷级数的余项相似.

1°. 如果乘积 (2) 收敛, 则乘积 (4) 也对任何 m 值都收敛; 反之, 若乘积 (4) 收敛, 则原乘积 (2) 也收敛②.

证明留给读者去做 [参看 **235**, 1°].

如此, 在无穷乘积的起头舍弃或添补有限多个 (不等于 0 的) 乘数不会影响其收敛性质.

① 如此要注意, 如果 $P=0$, 则无穷乘积作为发散. 这种说法虽然与级数的习惯说法不一致, 但它也被普遍采用, 因为可以使许多定理易于陈述.

② 记住我们总假设 $p_n \neq 0$.

2°. 如果无穷乘积(2) 收敛, 则

$$\lim_{m\to\infty}\pi_m=1$$

[参看 (4)].

这可由等式

$$\pi_m=\frac{P}{P_m}$$

及 P_m 的趋近于 $P\neq 0$ 推出.

3°. 如果无穷积 (2) 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty}p_n=1.$$

事实上, P_{n-1} 也随着 P_n 而趋近于 P, 如此

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{P_{n-1}}=\frac{P}{P}=1$$

[参看 **235** 段, 5°].

不再枚举无穷乘积与无穷级数的相似性质了, 我们来建立无穷乘积收敛性与无穷级数收敛性间的关系, 它使我们能直接将详细讨论过的级数理论应用于无穷乘积.

在无穷乘积收敛的情形, 乘数 p_n 由某处以后完全都是正的 (3°). 如此, 由 1° 我们今后可假设所有 $p_n>0$ 而不失一般性.

4°. 要无穷乘积 (2) 收敛, 其必要而充分的条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n \tag{5}$$

收敛. 在实现这个条件之下, 如果 L 是该级数之和, 则我们有

$$P=e^L.$$

以 L_n 表示级数 (5) 的部分和, 则我们有

$$L_n=\ln P_n,\quad P_n=e^{L_n}.$$

由对数函数及指数函数的连续性可推知, 如果 P_n 趋于有限正极限 P, 则 L_n 趋于 $\ln P$; 反之, 如果 L_n 有有限极限 L, 则 P_n 将有极限 e^L.

在研究无穷乘积 (2) 的收敛性时往往为了方便起见令

$$p_n=1+a_n$$

而将它写成

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \tag{2*}$$

的形式; 级数 (5) 则写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n) \tag{5*}$$

的形式.

利用这些表示法我们有下面的简单定理:

5°. 如果至少对充分大的 n 有

$$a_n > 0 \quad (\text{或 } a_n < 0),$$

则无穷乘积 (2*) 收敛的充要条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6}$$

收敛. 因为要乘积 (2*) 及级数 (6) 收敛必须

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{7}$$

[参看 3°], 则我们假设这条件已经实现. 于是有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$$

[**65** 段, 1)]. 在这情形, 由于级数 (5*) 及 (6) 的各项都自某项以后保持一定的正负号, 则按 **237** 段, 定理 2 这两个级数同时收敛或发散. 由此, 联系 4° 而推出我们的断言.

我们来提一下关于无穷乘积发散于 0 时的情形.

6°. 要无穷乘积 (2) [或 (2*)] 有**零**值, 则其必要而充分的条件是要级数 (5) [或 (5*)] 有和 $-\infty$.

特别地, 如果 $a_n < 0$ 并且级数 (6) 发散, 这样的情形就会发生.

证明留给读者去做.

最后, 我们利用乘积 (2) [或 (2*)] 与级数 (5) [或 (5*)] 之间的关系来建立无穷乘积绝对收敛的概念. 一个无穷乘积, 当其各项对数所组成的相应级数**绝对**收敛时, 就称为是**绝对**收敛的.

由 **246** 及 **247** 两段所论, 我们立即可以得出下述结论: 绝对收敛无穷乘积具有可交换性, 而非绝对收敛无穷乘积显然没有这种性质.

不难仿照 5° 来证明.

7°. 要无穷乘积 (2*) **绝对**收敛, 其必要而充分的条件是要级数 (6) **绝对**收敛.

251. 例 1) 我们来应用所证明诸定理到下列各无穷乘积上:

(a) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ 在 $x>1$ 时收敛而在 $0<x\leqslant 1$ 时发散, 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 的收敛与发散一致 (5°).

(b) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^x}\right)$ 在 $x>1$ 时收敛 (5°), 而在 $0<x\leqslant 1$ 时发散于 0 (6°).

2) 我们来证明 (在 $\alpha>\beta>0$ 时)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}=0.$$

对此只要确定无穷乘积

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\beta+n}{\alpha+n}\equiv\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}\right)$$

是发散的或 (参看 6°) 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}$$

是发散的. 而这不难由上面那个级数与调和级数比较而推知.

这个例子告诉我们, 把求序列极限问题化为无穷乘积的研究并应用无穷乘积理论, 有时的确是有利的.

3) 最后我们举一个欧拉把无穷乘积变为级数的著名例子. 如果将素数按递增次序编号:

$$p_1=2,\quad p_2=3,\quad p_3=5,\cdots,p_k,\cdots,$$

则在 $x>1$ 时成立恒等式

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\left(1-\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^x}\right)\cdots}$$
$$=1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\cdots+\frac{1}{n^x}+\cdots$$

或

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$$

按几何级数和的公式我们有

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=1+\frac{1}{p_k^x}+\frac{1}{(p_k^2)^x}+\cdots+\frac{1}{(p_k^m)^x}+\cdots.$$

如果把所有不超过正整数 N 的素数的这种级数 —— 其个数有限 —— 乘起来, 则部分积成为

$$P_x^{(N)}=\prod_{p_k\leqslant N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^x}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}+\sum_{n=N+1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^x},\tag{8}$$

这里求和号上的撇号表示求和不是延展在所有正整数上, 而只限于 (1 不算) 在其素因数展开式中只包含刚才引入的诸素数的那些正整数上 (当然, 开始的 N 个正整数都具有这种性质). 由此显然有

$$0<P_x^{(N)}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$$

既然级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 是收敛的, 则上式最右边表示其 N 项后的余项的式子在 $N\to\infty$ 时趋于 0; 取极限即得所求结果.

这个欧拉公式, 后 (1859 年) 被黎曼用来研究素数的分布问题.

4) 在 $x=1$ 时关系式 (8) 仍有效, 由此有

$$P_1^{(N)}=\prod_{p_k\leqslant N}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_k}}>\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=H_N,$$

如此在 $N\to\infty$ 时, $P_1^{(N)}\to\infty$, 即乘积

$$\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{p_k}\right)\cdots}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_k}}$$

发散而有值 $+\infty$.

这也就是欧拉所给的素数集合是无穷集合的新证明 (我们在证明过程中实际没有利用这一点); 因为如集合是有穷集时, 则该乘积必有有限值. 若将所得结果写成这样:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdots=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=0,$$

则由 5° 能断定下列级数发散:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{p_k}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}.$$

这个重要命题还给出关于素数增长的某些特征; 它远比肯定调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的发散更为有力, 因为这里所包含的还只是其中一部分的项而已.

§6. 初等函数的幂级数展开式

252. 泰勒级数 我们已经看到过如下的幂级数的例子:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{1}$$

其中各项是按 x 的幂排列的.

我们现在考虑更一般形式的幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots. \tag{2}$$

这是按二项式 $x-x_0$ (而不是 x) 的幂排列的. 这种级数与 (1) 式级数没有本质上的区别, 因为由一个简单的变量替换 $x-x_0=y$ 就可以相互变换 (只是变量记号不同).

以下我们将详细研究幂级数的性质, 它们在许多地方与多项式相似. 多项式就是幂级数的一段, 这使得幂级数成为近似计算的便利工具. 由于这些事实, 将预先给定的函数展为 $x-x_0$ 的幂的问题 (特别是, 展为 x 的幂的问题), 也即表示为 (2) 型 [或 (1) 型] 级数和的问题便很重要了.

我们要在此讲关于初等函数的这种展开式, 而对于这个问题的解决, **105—108** 段所详细讨论过的泰勒公式已给我们开辟了途径. 事实上, 我们假设所考虑的函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0+H]$ 或 $[x_0-H, x_0](H>0)$ 内具有各阶导函数 (并且是连续的). 于是, 我们在 **106** 段已看到, 对这区间里的一切 x 值恒成立公式:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x), \tag{3}$$

这里余项 $r_n(x)$ 可以表示为 **106** 段指出的诸形式. 同时 n 可以取任意大, 也即展开式可写到 $x-x_0$ 的任意高次幂.

这自然使我们想到无穷展开式:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots. \tag{4}$$

这种级数, 无论它是否收敛以及事实上有无和 $f(x)$, 都称为函数 $f(x)$ 的泰勒级数. 它具有 (2) 的形式, 其系数

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\cdots,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\cdots$$

称为泰勒系数.

因为由 (3) 可看出 $f(x)$ 与泰勒级数 $n+1$ 项和之间的差恰为 $r_n(x)$, 则显然: 要展开式 (4) 事实上对某 x 值成立其必要而充分的条件是要泰勒公式余项 $r_n(x)$ 关于 x 值随 n 的增大而趋于 0:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \tag{5}$$

在研究这等式是否成立并对什么 x 值成立这个问题时, 我们用到表达余项 $r_n(x)$ 与 n 的关系的各种不同形式.

常常要遇到的是 $x_0=0$ 而函数 $f(x)$ 直接展为 x 幂级数的情形:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots;\text{①} \tag{6}$$

这级数有 (1) 的形式, 其系数为:

$$a_0=f(0),\quad a_1=\frac{f'(0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(0)}{2!},\cdots,a_n=\frac{f^{(n)(0)}}{n!},\cdots. \tag{7}$$

①这级数通常称为麦克劳林级数.

现在我们较详细地写出适用于这特殊假设 $x_0 = 0$ 的余项 $r_n(x)$ [**106** 段].

拉格朗日形式:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}; \tag{8}$$

柯西形式:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} (1-\theta)^n x^{n+1}. \tag{9}$$

这里乘数 θ 只知道是介于 0 与 1 之间, 但它可以随 x 或 n 而变 (甚至随形式而变).

现在来讲具体的展开式.

253. 指数函数及主要三角函数的级数展开式 我们先来证下面这个简单命题, 它直接包含着一系列重要的情形:

*如果函数 $f(x)$ 在区间 $[0, H]$ 或 $[-H, 0]$ $(H > 0)$ 内具有各阶导函数, 并且这些导函数的绝对值当 x 在该区间内变化时恒***为同一数所界定**:

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant L \tag{10}$$

(*这里 L 与 n* **无关**), *则在全区间内有展开式* (6).

事实上, 取拉格朗日形式的余项 $r_n(x)$ [参看 (8)], 我们由 (10) 有:

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leqslant L \cdot \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}.$$

在 n 无限增大时 $\dfrac{H^{n+1}}{(n+1)!}$ 式趋于 0 [**45** 段, 1)]; 这 [由于 **235** 段, 5°] 可由级数

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$$

的收敛性推知 [**239** 段, 2) (a)]. 因此 $r_n(x)$ 也就有极限 0, 这就证明了我们的命题.

这个命题在任何区间 $[-H, H]$ 内直接适用于函数

$$f(x) = e^x, \quad \sin x, \quad \cos x,$$

因为它们的导函数 $f^{(n)}(x)$ 分别等于

$$e^x, \quad \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

而在该区间内 e^x 的绝对值恒以 e^H 为上界, $\sin x$ 及 $\cos x$ 则以 1 为上界.

这些函数的泰勒系数已在 **108** 段, 1)—3) 算出, 故立即可写出其展开式如下:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \tag{11}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots, \tag{12}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + \cdots, \tag{13}$$

它们对任何 x 值都成立 —— 因为 H 是任意的.

254. 欧拉公式 刚才得出的几个初等展开式的系数形式使我们想到其间可能存在某种关系. 但如果保持在实数范围以内, 则要建立这种关系是不可能的. 欧拉引入虚指数幂才达到了这个目的.

虽然在本书所讲只限于实数及实变量, 但我们却在此破例来讲一讲欧拉公式, 它以纯虚自变量的指数函数来表出实自变量的三角函数.

如果 (姑且纯形式地) 在 (11) 中以虚数 yi 替代实数 x, 则得:

$$\begin{aligned} e^{yi} &= 1 + yi + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^4}{4!} + \frac{(yi)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + yi - \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!}i + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!}i + \cdots. \end{aligned}$$

分开实部与虚部, 有

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right).$$

括号里的式子恰好就是我们已经知道的函数 $\cos y$ 及 $\sin y$ 的展开式 [参看 (13) 及 (12)]. 如此

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y. \tag{14}$$

将 y 代以 $-y$ 则同样有

$$e^{-yi} = \cos y - i \sin y.$$

加减这两个等式即导出著名的欧拉公式:

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}. \tag{15}$$

公式 (14) 及 (15) 在分析里有广泛的用处.

现在我们转向其逻辑的理解[①]. 首先考虑依凭正整数序号 n 的复变量 $z_n = x_n + iy_n$, 其极限定义的说法与实数情形完全一样 [**28** 段]: 设有一个复数 $c = a + ib$, 如果对任何正数 ε 恒可找到这样一个序号 N, 使 $n > N$ 时成立不等式 $|z_n - c| < \varepsilon$[②], 则称 c 为变量 z_n 的极限.

因为

$$|z_n - c| = |(x_n - a) + i(y_n - b)| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2},$$

故显然可见, 恰恰在实部及虚部 x_n 及 y_n 分别有 $x_n \to a$ 及 $y_n \to b$ 的时候 $z_n \to c$.

现在我们来考虑复数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n. \tag{C}$$

所谓级数 (C) 是收敛的是指: 它的部分和

$$C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$

随 n 的增大而趋于某复数 C 为其极限 —— C 即级数之和. 将这里有关诸数都分为实部与虚部:

$$C = A + iB, \quad c_n = a_n + ib_n, \quad C_n = A_n + iB_n,$$

①假定读者已经由高等代数教科书里知道复数及复变量了.

②这里 $|\alpha + i\beta|$ 表示复数 $\alpha + i\beta$ 的 "模", 即 $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

而

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$

则由前面所说可见,

$$\text{随着} A_n \to A, \quad B_n \to B \text{ 而有 } C_n \to C,$$

即复数级数 (C) 的收敛于 C 就等价于实数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\text{A}) \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\text{B})$$

的分别收敛于其和 A 及 B. 由此推知, 复数级数也如实数级数一样具有可结合性 [**245** 段].

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 这个由级数 (C) 的模所组成的级数是收敛的, 则由不等式

$$|a_n| \leqslant |c_n|, \quad |b_n| \leqslant |c_n|$$

知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

也收敛, 由此推知级数 (A) 及 (B) 收敛 [**243** 段], 所以级数 (C) 也收敛. 在这情形级数 (C) 称为*绝对收敛的*. 例如, 级数

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \tag{16}$$

对任何复数值 z 绝对收敛, 因为其各项的模的实级数

$$1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \cdots + \frac{|z|^n}{n!} + \cdots$$

收敛.

绝对收敛级数 (C) 具有*可交换性*, 因为级数 (A) 及 (B) 具有这种性质 [**246** 段]. 最后, *关于乘法的定理*也可以推广到复数绝对收敛级数上 [**248** 段]; 对实数情形所给的证明 —— 根据上面所说的话 —— 在此可以逐字逐句搬过来.

现在我们以一般形式提出 z 为复数时的幂 e^z 定义问题. 在这情形, 当 z 是一个实数 x 时这幂已经有定义了; 在前一段我们已经证明它有展开式 (11). 在虚指数 z 情形幂 e^z 还没有定义; 模仿该展开式, 我们在此不妨设 e^z 就等于级数 (16) 之和*作为定义* (这和显然存在). 很重要的是, 在此仍保持指数函数的这个基本性质:

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'},$$

这只要把 e^z 及 $e^{z'}$ 的级数互乘出来就可证明 [参看 **248** 段, 2)].

如此, 前面我们在展开式 (11) 里以 yi 代替 x 时就是直接用了这个广义的幂概念.

最后我们指出, 如果 $z = x + yi$, 则按指数法则有 $e^z = e^x \cdot e^{yi}$, 如此由 (14) 终于有:

$$e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{17}$$

255. 反正切的展开式　在函数 $y = \arctan x$ 上前面 **253** 段所证明的一般命题已经不适用. 事实上, 它在 **96** 段, 5) 所找到的 n 次导函数的表达式

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \tag{18}$$

不能保证对所有 $y^{(n)}$ 有共同的界限.

因为相应的泰勒级数 [参看 **108**, 6)]

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots$$

只收敛于区间 $[-1,1]$①内, 所以在这区间以外已不应说函数 $\arctan x$ 由这级数表出了. 反之, 对于 $|x| \leqslant 1$ 我们按拉格朗日公式 (8)[考虑到 (18) 并令 $y_\theta = \arctan \theta_x$] 有

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{\left|\cos^{n+1} y_\theta \cdot \sin(n+1)\left(y_\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)\right|}{n+1}|x|^{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

由此可见 $r_n(x) \to 0$, 如此对区间 $[-1,1]$ 内的所有 x 值恒有展开式

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots. \tag{19}$$

我们再一次提醒, 虽然 $\arctan x$ 在这区间外有一定的意义, 但展开式 (19) 在那里已不成立, 因为该级数在那里没有和.

由级数 (19) 取 $x = 1$ 的特例时得出著名的莱布尼茨级数

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1} + \cdots, \tag{20}$$

这是分析史上第一个表示 π 值展开式的级数.

256. 对数级数　如果取 $\ln(1+x)(x > -1)$ 作函数 $f(x)$, 则相应的泰勒级数如下 [**108** 段, 5)]:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots,$$

它只对区间 $(-1,1]$② 内的 x 值收敛; 这就是说, 只有对这些值研究余项 $r_n(x)$ 的性态才是有意义的.

我们先取余项的拉格朗日形式 (8). 因为

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

---

①按达朗贝尔检验法 [**243** 段] 不难证明这级数在 $|x| < 1$ 时 (绝对) 收敛而在 $|x| > 1$ 时发散. 在 $x = \pm 1$ 时的 (非绝对) 收敛可由莱布尼茨定理推知 [**244** 段].

②并且这里可由达朗贝尔检验法建立 $|x| < 1$ 时的绝对收敛及 $|x| > 1$ 时的发散. 在 $x = 1$ 时按莱布尼茨定理有 (非绝对) 收敛性, 而在 $x = -1$ 时得一变号发散调和级数.

[**96** 段, 2)], 于是

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1).$$

如果 $0 \leqslant x \leqslant 1$, 则最后一个乘数不大于 1 而由此有

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}, \quad \text{如果在 } n \to \infty \text{ 时 } r_n(x) \to 0.$$

但当 $x < 0$ 时这个乘数的性态就不清楚了, 而需要采用余项的柯西形式 [参看 (9)].

我们有

$$r_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1),$$

如此

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

因为在 $x > -1$ 时 $1 + \theta x > 1 - \theta$, 于是最后一个乘数小于 1, 所以, 只要 $|x| < 1$, 就显然有 $r_n(x) \to 0$.

有趣的是, 虽然柯西形式对 -1 与 1 之间的一切 x 值能完全解决这个问题, 但它在 $x = 1$ 时不能给出什么结论; 在这情形下我们得到

$$|r_n(1)| < (1-\theta)^n,$$

但因 θ 能随 n 而变故不能断定 $(1-\theta)^n \to 0$.

如此, 总体来说, 对区间 $(-1, 1]$ 内所有 x 值确实有

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \tag{21}$$

其中在 $x = 1$ 时我们得到已知的级数

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots. \tag{22}$$

由级数 (21) 还可以推出其他有用的展开式. 例如, 在其中以 $-x$ 代 x (在此认为 $|x| < 1$) 并由级数 (21) 减去所得级数, 如此导出下面的级数:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \cdots + \frac{1}{2m+1}x^{2m} + \cdots\right). \tag{23}$$

在此令 $x = \dfrac{1}{2n+1}$, 而 n 是一个任意的正整数. 既然这时候

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n},$$

则我们得展开式

$$\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right], \tag{24}$$

它在计算对数时有用 [**262** 段].

257. 斯特林公式 作为展开式 (24) 的另一应用我们指出如何由它导出一个重要的分析公式 —— 斯特林公式[①].

因此我们把展开式 (24) 写成这样:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots,$$

这个式子显然大于 1 而小于

$$1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]=1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

如此我们有

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

由此, 取指数而得

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

现在我们引入这样一个自然指数 n 的函数:

$$a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}},$$

于是

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}.$$

而由前面的不等式有

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}=\frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}},$$

如此, 一方面 $a_n>a_{n+1}$, 而另一方面则

$$a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}<a_{n+1}\cdot e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

如此, 变量 a_n 随着 n 的递增而递减 (保持下有界, 例如 0 是一个下界) 并且趋于一个有限的极限 a, 变量 $a_ne^{-\frac{1}{12n}}$ 则递增而显然趋于同一极限 a (因 $e^{-\frac{1}{12n}}\to 1$). 既然对任何 n 成立不等式

$$a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}<a<a_n,$$

则可找到这样一个数 θ, 包含在 0 与 1 之间, 使

$$a=a_n\cdot e^{-\frac{\theta}{12n}}\quad 或\quad a_n=a\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}$$

(θ 这个数一般说来是随 n 而变的). 回忆变量 a_n 的定义我们得到

$$n!=a\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}\quad(0<\theta<1).\tag{25}$$

现在只需确定常数 a 了. 这用到 **188** 段的沃利斯公式, 它可写成这样的形式:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n!!}{(2n-1)!!}.$$

[①] James Stirling (1692—1770) 是英国数学家. 此公式发表于 1730 年.

最后一乘数可变形如下:

$$\frac{2n!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n!!)^2}{2n!} = \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{2n!};$$

这里 $n!$ 代之以下式:

$$\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot a_n,$$

而 $2n!$ 代之以类似的式子:

$$\sqrt{2n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot a_{2n},$$

经初等的化简我们得出

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{2n(2n+1)}} \cdot \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{a}{2},$$

如此 $a = \sqrt{2\pi}$.

将此 a 值代入公式 (25) 我们就导出斯特林公式:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1).$$

如果略去最后一乘数则得近似公式①

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

它可用来计算很大的 n 值的阶乘 $n!$. 所略去的乘数不难估计其相对误差, 它显然小于 $e^{\frac{1}{12n}} - 1$.

斯特林公式在概率论及统计学里常常用到.

258. 二项式级数 最后, 我们取 $f(x) = (1+x)^m$, 而 m 是一个任意的实数, 异于 0 及所有正整数 (对正整数 m 则得已知的牛顿有限展开公式). 在此情形泰勒级数有这样的形式 [**108** 段, 4)]:

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n}x^n + \cdots,$$

它叫做*二项式级数*, 而其系数叫做*二项式系数*. 在所作关于 m 的假设之下这些系数没有一个是 0 (反之, 如果 m 是正整数, 则 x^{m+1} 及所有以下各项的系数都变成 0). 由达朗贝尔检验法 [**243** 段] 不难确定, 当 $|x| < 1$ 时二项式级数绝对收敛, 当 $|x| > 1$ 时发散. 对余项 $r_n(x)$ 的研究我们将在 $|x| < 1$ 的假设之下进行, 即取其柯西形式 (9) [拉格朗日形式在此不能对所有我们关心的 x 值给出答案].

因为

$$f^{(n+1)}(x) = m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)(1+x)^{m-n-1},$$

于是余项

$$r_n(x) = \frac{m(m-1)\cdots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{1 \cdot 2 \cdot \ \cdots \ \cdot n}(1-\theta)^n x^{n+1}.$$

①它其实也是斯特林所建立的.

改变乘数之间的结合法可将它写成这样:

$$r_n(x) = \frac{(m-1)(m-2)\cdots(\overline{m-1}-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ \cdots\ \cdot n}x^n \cdot mx(1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

这三个式子中的第一个就是相应于指数 $m-1$ 的二项式级数的通项; 因为在 $|x|<1$ 时二项式级数无论对什么指数都收敛, 故此式在 $n\to\infty$ 时趋于 0. 至于其余两式, 则第二个的绝对值介于与 n 无关的两个界限:

$$|mx|\cdot(1-|x|)^{m-1} \quad 与 \quad |mx|\cdot(1+|x|)^{m-1}$$

之间; 第三个, 也如在 **256** 段里一样, 小于 1. 如此, $r_n(x)\to 0$, 即对 $|x|<1$ 有展开式

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ \cdots\ \cdot n}x^n+\cdots, \tag{26}$$

它也以牛顿之名见称.

我们还没有接触到它在 $x=\pm 1$ 两值之下是否适用的问题, 因为它的解决需要对余项的精细研究. 我们只指出, 在 $x=1$ 时展开式 (26) 对 $m>-1$ 成立, 而在 $x=-1$ 时对 $m>0$ 成立.

我们指出二项式级数的一些特例, 例如 $m=-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 等情形:

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$$

(寻常几何级数), 其次,

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}x^n+\cdots \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

及

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2n!!}x^n+\cdots \quad (-1<x\leqslant 1).$$

要注意的是, 在有理数 m 的情形二项式级数总是给出根式的算术值.

259. 关于余项研究的一个笺注 在以上关于函数的泰勒级数展开式的各个实例中, 对一切使级数收敛的 x 值它们的和总是等于原函数. 所以读者可能会这样猜测: 要保证展开式 (4) 或 (6) [**252** 段] 一般只要确定级数的收敛性, 甚至不必验证关系 (5):

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

但事实上并不如此. 我们试看这个柯西的例子:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x\neq 0\ 时), \quad f(0)=0.$$

在 $x \neq 0$ 时它具有各阶导函数:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \cdots.$$

而一般地

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{27}$$

这里 $P_n(z)$ 是 z 的整多项式 ($3n$ 次). 这个规律不难由数学归纳法证明其一般成立.

现在来证明, 在点 $x = 0$ 我们这个函数各阶的导数也都存在, 并全都等于 0[①]. 事实上, 首先是 $x \to 0$ 时

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \to 0,$$

如此, $f'(0) = 0$[②], 我们假设要求证明的论断对所有到 n 阶为止的导数都已经是正确的. 于是 [参看 (27)] $x \to 0$ 时

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{\frac{1}{x} \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} \to 0,$$

因为分子是 $\frac{c}{x^m}$ 形式的诸项之和. 这就是说, $f^{(n+1)}(0) = 0$. 按数学归纳法我们的话被完全证明了.

这个系数全是 0 的函数的麦克劳林级数 (6) 对一切 x 值都收敛, 但对任何值 (除 $x = 0$ 外) 都不表示原来的函数.

如此, 预先定出泰勒级数的收敛区域只有辅助的用处: 借此有时能预先剔除那些使级数发散的 x 值而不加考虑, 因为对于这些值, 结果显然是否定的. 在级数收敛的那些值上则只有研究泰勒公式的余项才能证明泰勒级数之和就是原来的函数.

§7. 用级数作近似计算

260. 问题的提出 我们以所得出诸具体展开式为例来说明如何利用无穷级数作近似计算. 先说几句关于级数的一般的话.

如果一个数 A 可以展为级数:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots,$$

这里 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 是一些方便的数 (通常是有理数), 而我们近似地令

$$A \approx A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

[①]顺便提一下, 拉格朗日认为要一个 (不恒等于 0 的) 函数在某点连同其所有各阶导数全等于 0 是不可能的. 柯西做出了他的一个例子来反驳拉格朗日的见解.

[②]这是因为一般地对任何指数 $\mu > 0$ 我们有

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z^\mu}{e^z} = 0$$

[参看 **121** 段, 4)] (这一点今后要记住). 这里的 z 就是 $\frac{1}{x^2}$ ($x \to 0$ 时).

则因舍弃对所有其余的诸项而产生的校正数由余项

$$\alpha_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

表出. 当 n 充分大时误差可随意地小, 而使 A_n 能以任何预定的精确度来表出 A.

我们关心的是要能简洁地做出余项 α_n 的估值; 这使我们在逐次计算部分和时只要所得近似值达到所要求的精确度就可以及时停止.

如果所考虑的是交错级数并且项的绝对值一致递减 (莱布尼茨型), 则我们已经知道 [**244** 段附注], 它的余项与首项同正负号而绝对值小于首项. 这种估值就其简单而言已不能再要求有所改进了.

比较复杂一些的是正项级数的情形. 这时候通常设法找一个各项较大而容易求和的正项级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$, 其中 $a'_n \geqslant a_n$, 并且取这新级数的余项 α'_n 的大小作为余项 α_n 的估值: $\alpha_n \leqslant \alpha'_n$. 例如, 对级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m^2}$ 可以得出

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n},$$

而对于级数 $1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m!}$,

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdots m} < \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{m-n}} = \frac{1}{n!n}$$

[这个估值法我们在 **49** 段计算 e 时实际上用到过].

通常求一数 A 的十进近似值时级数的各项也可能没有表示为十进小数. 在化为十进小数时, 由尾数的化整而引起新的误差, 这也须计及.

最后, 我们指出, 并非每个其和为数 A 的级数都适用于实际作数 A 的计算 (甚至其各项简单且余项容易估值时也未必适用). 问题在于其部分和收敛的快慢, 也就是说部分和逼近 A 的快慢.

我们取下列两级数为例 [参看 **255** 段及 **256** 段, (22)]

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad \text{及} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots,$$

它们分别为 $\dfrac{\pi}{4}$ 及 $\ln 2$ 的展开式. 这两个级数收敛得慢; 如果用以求那两个数的近似值, 则须求很多项的和才能达到高度的准确性. 下面我们不难利用较适当的级数以很高的精确度来计算该二数的十进近似值.

261. π 的计算 回到已知的反正切级数 [**255** 段, (19)]:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

如果取 $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 则 $\arctan x = \dfrac{\pi}{6}$, 而得级数

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3} + \cdots\right),$$

它已经适于作计算了.

但还有更便于计算 π 的级数. 我们令 $\alpha = \arctan\frac{1}{5}$, 于是

$$\tan\alpha = \frac{1}{5},\quad \tan 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12},\quad \tan 4\alpha = \frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

由于 $\tan 4\alpha$ 接近于 1, 故显然角 4α 接近于 $\frac{\pi}{4}$; 令 $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$, 我们有

$$\tan\beta = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239},\quad 而\quad \beta = \arctan\frac{1}{239}.$$

由此得到这样一个公式:

$$\pi = 16\alpha - 4\beta = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9} - \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{5^{11}} + \cdots\right)$$
$$-4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3} + \cdots\right).$$

如果我们按上式来计算 π 至小数点后第 7 位, 则只需计算公式中已写出的那些项就够了. 因为两级数都属于莱布尼茨型, 则在被减数和减数中所舍弃项的校正数分别为:

$$0 < \Delta_1 < \frac{16}{13\cdot 5^{13}} < \frac{1}{10^8}\quad 及\quad 0 < \Delta_2 < \frac{4}{5\cdot 239^5} < \frac{1}{10^8}.$$

将所保留诸项化为十进小数, 而取到第 8 位数字 (四舍五入). 把计算列成下式 (括号里的 + 或 − 表示校正数的正负号):

$$\begin{array}{rl} \frac{16}{5} = & 3.20000000 \\ \frac{16}{5\cdot 5^5} = & 0.00102400 \\ +)\ \frac{16}{9\cdot 5^9} = & 0.00000091(+) \\ \hline & 3.20102491 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \frac{16}{3\cdot 5^3} = & 0.04266667(-) \\ \frac{16}{7\cdot 5^7} = & 0.00002926(-) \\ +)\ \frac{16}{11\cdot 5^{11}} = & 0.00000003(-) \\ \hline & 0.04269596 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3.20102491 \\ -)\ 0.04269596 \\ \hline 3.15832895 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \frac{4}{239} = & 0.01673640(+) \\ -)\ \frac{4}{3\cdot 239^3} = & 0.00000010(-) \\ \hline & 0.01673630 \end{array}$$

算出所有校正数我们有:

$$3.15832895 < 16\alpha < 3.15832898,$$
$$-0.01673632 < -4\beta < -0.01673630,$$

而

$$3.14159263 < \pi < 3.14159268.$$

如此终于得出 $\pi = 3.1415926\cdots$, 而所有写出的位数都是精确的.

262. 对数的计算 计算根据的是 **256** 段中的级数 (24):

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]. \quad (1)$$

在 $n=1$ 时得 $\ln 2$ 的展开式:

$$\ln 2=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^3}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{9^5}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{9^6}+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{9^7}+\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{9^8}+\cdots\right).$$

这个级数完全适于作计算. 例如, 我们来证明, 只限于所写出诸项已能求 $\ln 2$ 精确至第 9 位十进数字.

事实上, 如果把这级数由第 10 项起完全舍弃则相应校正数为:

$$\Delta=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{19}\cdot\frac{1}{9^9}+\frac{1}{21}\cdot\frac{1}{9^{10}}+\cdots\right)<\frac{2}{3\cdot 19\cdot 9^9}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{12\cdot 19\cdot 9^8}<\frac{2}{10^{10}}.$$

计算到 (1) 小数点后第 10 位, 把计算列成下式:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}&=0.6666666667(-)\\
\frac{2}{3\cdot 3\cdot 9}&=0.0246913580(+)\\
\frac{2}{3\cdot 5\cdot 9^2}&=0.0016460905(+)\\
\frac{2}{3\cdot 7\cdot 9^3}&=0.0001306421(+)\\
\frac{2}{3\cdot 9\cdot 9^4}&=0.0000112901(-)\\
\frac{2}{3\cdot 11\cdot 9^5}&=0.0000010264(-)\\
\frac{2}{3\cdot 13\cdot 9^6}&=0.0000000965(-)\\
\frac{2}{3\cdot 15\cdot 9^7}&=0.0000000093(-)\\
\frac{2}{3\cdot 17\cdot 9^8}&=0.0000000009(+)\\
\hline
&\ 0.6931471805
\end{aligned}$$

算出所有校正数我们有:

$$0.6931471802<\ln 2<0.6931471809,$$

而

$$\ln 2=0.693147180\cdots,$$

所写 9 位数字都是精确的.

现在令 (1) 中 $n=4$, 我们得

$$\ln 5 = 2\ln 2 + \frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{81}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{81^2}+\cdots\right).$$

利用已经算出的 $\ln 2$ 值, 不难由此公式算出 $\ln 5$, 然后算出 $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$. 于是可以以任何精确度算出转化自然对数为十进对数的模

$$M = \frac{1}{\ln 10},$$

这模等于 $M = 0.434294481\cdots$, 乘以模, 我们就求得常用对数 (也称十进对数): $\lg 2$ 及 $\lg 5$.

在基本公式 (1) 里我们也化成常用对数:

$$\lg(n+1) - \lg n = \frac{2M}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]. \tag{2}$$

这里令 $n = 80 = 2^3\cdot 10$ 并且注意 $n+1 = 81 = 3^4$, 如此有

$$4\lg 3 - 3\lg 2 = \frac{2M}{161}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25921}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{25921^2}+\cdots\right)+1,$$

由此不难求出 $\lg 3$. 其次, 在公式 (2) 里令 $n = 2400 = 3\cdot 2^3\cdot 10^2$, 我们有 $n+1 = 2401 = 7^4$ 以及

$$4\lg 7 - 3\lg 2 - \lg 3 - 2 = \frac{2M}{4801}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{23049601}+\cdots\right),$$

如此就求得 $\lg 7$. 选配类似的数的组合能以任何精确度来求素数的对数, 然后乘以一些正整数而加起来就可求出各个复合数的对数.

也可以采取另一做法, 直接算出相邻正整数的对数而用公式 (2) 由 $\lg n$ 过渡到 $\lg(n+1)$. 如此, 要计算 1000 至 10000 的对数我们在公式 (2) 里只取一项, 即近似地令

$$\lg(n+1) - \lg n = \frac{2M}{2n+1} \quad (10^3 \leqslant n \leqslant 10^4).$$

在此校正数为

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{2M}{2n+1}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]\\ &< \frac{2M}{3(2n+1)^3}\left[1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]\\ &= \frac{2M}{3(2n+1)\cdot 2n\cdot(2n+2)} < \frac{2M}{24n^3}.\end{aligned}$$

既然这里 $n \geqslant 10^3$, 而 $2M < 1$, 则

$$\Delta < \frac{1}{24\cdot 10^9} < \frac{1}{2\cdot 10^{10}}.$$

即使所有误差都加起来, 则总误差仍小于 $\dfrac{10^4}{2\cdot 10^{10}} = \dfrac{1}{2\cdot 10^6}$. 但如果另按第一法计算出一系列校验对数, 就不难避免这种误差的累积. 这样既可以达到大得多的精确度, 而同时保持第二法所固有的计算自动性, 这特别在做大表时很有价值.

第十六章　函数序列及函数级数

§1. 一致收敛性

263. 导言　前面我们已讨论过无穷序列及其极限、无穷级数及其和, 这些序列的元素或级数的项都是常数. 固然, 有时其中也引入变量作参数, 但在研究时经常给以常数值. 如此, 比如说, 当我们确定序列

$$\left(1+\frac{x}{1}\right)^1, \left(1+\frac{x}{2}\right)^2, \left(1+\frac{x}{3}\right)^3, \cdots, \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \cdots$$

有极限 e^x 时或级数

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

有和 $\ln(1+x)$ 时 x 总是常数. 序列的元素及其极限或级数的项及其和的函数性质我们是完全不顾及的; 现在我们将注意力引向这一方面.

设给定一个序列, 其元素是同一变量 x 的函数

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots \tag{1}$$

确定在变量的一个变域 $\mathscr{X}=\{x\}$[①]. 设对 $\mathscr{X}$ 内每一 x 值这序列有一有限极限; 它既然完全由 x 所确定, 则也是 $\mathscr{X}$ 内的 x 的函数:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x), \tag{2}$$

它称为序列 (1) 或函数 $f_n(x)$ 的极限函数.

①通常这是一个区间; 但我们姑且保持最一般的情形而把 $\mathscr{X}$ 理解为任一无穷数集.

现在我们关心的不光是在个别点 x 上极限的存在, 而也关心极限函数的函数性质 —— 即其连续性、导数及积分等问题.

我们已在 **234** 段看到, 数序列及其极限的讨论只是数项级数及其和的讨论的另一种形式. 现在我们来讨论一个级数, 其各项为某区域 $\mathscr{X}$ 内同一变量 x 的函数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots . \tag{3}$$

设这个级数在 $\mathscr{X}$ 的每个 x 值上都收敛; 于是其和也是一个 x 的函数 $f(x)$. 这个和可由 (2) 那样的极限等式来确定, 这里 $f_n(x)$ 理解为部分和

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x). \tag{4}$$

反之, 如果令

$$u_1(x) = f_1(x), \quad u_2(x) = f_2(x) - f_1(x),$$
$$u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \cdots ,$$

则任意给定的序列 (1) 的极限函数问题可以采取级数 (3) 的求和问题的形式来研究. 我们常常要同函数级数打交道, 因为用这种形式研究极限函数在实际上通常是比较便利的.

这里也要注意, 我们所要仔细研究的对象不单是级数 (3) 的收敛问题, 也还有其和的函数性质, 这我们在前面已经提过.

极限函数 (级数和) $f(x)$ 的函数性质实际上不仅依赖于函数 $f_n(x)$ (或级数项) 的函数性质, 也依赖于 $f_n(x)$ *趋近于* $f(x)$ *的性质*. 我们首先要来讲这方面可能出现的几种典型情况.

264. 一致收敛性及非一致收敛性 我们假设对 $\mathscr{X}$ 内所有 x 值等式 (2) 恒成立. 按极限定义这就是说: *只要指定了* $\mathscr{X}$ *内一个* x *值* (为了要处理固定的数序列), 对任何给定的 $\varepsilon > 0$ 必可找到这样一个序号 N, 使得对所有 $n > N$ 恒成立不等式

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \tag{5}$$

这里 x *即理解为预先指定的那个值*.

如果取*另一* x 值, 则得另一数序列, 而对同一 ε 所找到的序号 N 可能已不适用; 于是必须代之以更大的. 但 x 可取*无穷多个*值, 如此在我们面前有*无穷多个*不同的收敛于极限的数序列. 对于每一序列要分别找它的一个 N; 于是发生这样的问题: 是否存在这样一个序号 N, 它在所给 ε 之下能*同时*适用于所有这些序列呢?

我们来举例指出, 这样的共同序号 N 在有一些情形是存在的, 在有些情形则不存在.

1) 先设

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

因为这里

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{1}{2n},$$

故立即可看出, 要不等式 $f_n(x) < \varepsilon$ 实现只要取 $n > \frac{1}{2\varepsilon}$ 就行了, 而不论 x 是什么值. 如此, 比如说 $N = E\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$①, 在这情形就同时适用于所有 x 值.

2) 现在我们令

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

对任何固定的 $x > 0$, 只要取 $n > E\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)$, 就能使 $f_n(x) < \frac{1}{nx} < \varepsilon$. 但另一方面, 不论 n 取多大, 对于函数 $f_n(x)$ 在区间 $[0,1]$ 内总可找到一点 $\left(比如说点\ x = \frac{1}{n}\right)$ 在该点函数值等于 $\frac{1}{2}$: $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. 如此, 要凭 n 的增大来使对 0 至 1 间所有 x 值同时有 $f_n(x) < \frac{1}{2}$ 是做不到的. 换句话说, 对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 已经不存在同时适用于所有 x 值的共同序号 N 了.

图 2 是在 $n = 4$ 及 $n = 40$ 时函数的图像: 图中特别显眼的是高度为 $\frac{1}{2}$ 的峰, 它随着 n 的增大而自右向左移动. 虽然当 n 增大时, 曲线序列的点沿着任意个别取定的铅垂线而无限趋近于 x 轴, 但没有一条曲线在 $x = 0$ 至 $x = 1$ 全程内整个接近于该轴.

在第一例, 所考虑的函数情形就两样了; 我们没有画出它们的图像, 因为它们, 例如在 $n = 4$ 或 40 时, 可由图 2 的图像将所有纵坐标线缩至 $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{40}$ 而得. 在这情形曲线就在其全程内接近于 x 轴.

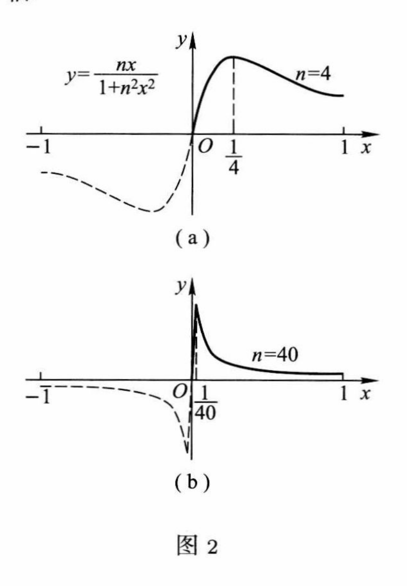


图 2

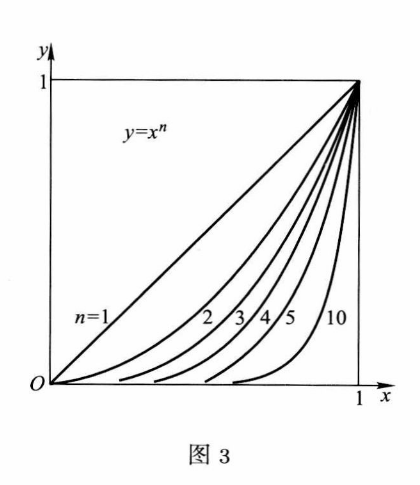


图 3

现在我们来下一个基本定义:

①关于 $E(x)$ 这记号参看第一卷 **17** 段.

如果 1) 序列 (1) 在 $\mathscr{X}$ 内有一极限函数 $f(x)$ 并且 2) 对每一数 $\varepsilon>0$ 都存在这样一个**与** x **无关**的序号 N, 使在 $n>N$ 时不等式 (5) **同时对** $\mathscr{X}$ **内的所有** x 都成立, 则称序列 (1) [或函数 $f_n(x)$] 对区域 $\mathscr{X}$ 内的 x **一致地**收敛于 [或趋于] 函数 $f(x)$.

如此, 在前面第一个例里函数 $f_n(x)$ 对区间 $[0,1]$ 内的 x 一致地趋于 0, 而在第二例则否.

我们再来看几个非一致收敛的例子.

3) 如果

$$f_n(x)=x^n \quad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

则在 $x<1$ 时

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0,$$

并且 $f(1)=1$.

在这情形不等式 $x^n<\varepsilon$ $(\varepsilon<1)$ 的不可能同时对所有 $x<1$ 成立, 可由 $x\to 1$ 时 (n 固定) $x^n\to 1$ 看出. 图 3 表现出它失去一致性时的特点: 这里极限函数跳跃着变, 而峰不移动.

4) 最后, 设

$$f_n(x)=2n^2x\cdot e^{-n^2x^2} \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

试看对任何 n

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{2n}{e},$$

由此可见在区间 $[0,1]$ 内不能一致趋近于极限函数, 它在此恒等于 0. 这回峰高不但破坏了一致地趋于 0, 还随同 n 而无限增大.

现在我们把所有以上关于函数收敛性所说的话搬到函数级数 (3) 的情形上.

设该级数收敛, 我们来考虑其和 $f(x)$、部分和 $f_n(x)$ [参看 (4)] 及其第 n 项以后的余项

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)=f(x)-f_n(x).$$

对任何固定的 x,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \quad 并且 \quad \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0.$$

如果部分和 $f_n(x)$ 对区域 $\mathscr{X}$ 内的 x **一致地**趋于级数之和 $f(x)$ [也就是说, 级数 $\varphi_n(x)$ 的余项**一致**趋于 0], 则称级数 (3) 在这区域内**一致**收敛.

这定义显然等价于:

一个在区域 $\mathscr{X}$ 内所有 x 值上都收敛的级数 (3), 如果对每一 $\varepsilon>0$ 恒存在这样一个与 x **无关**的序号 N, 使在 $n>N$ 时不等式

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad 或 \quad |\varphi_n(x)|<\varepsilon \tag{6}$$

对 $\mathscr{X}$ **内的所有** x 都成立, 则称为在此区域内是**一致**收敛的.

只要变换上面所引各序列的例子, 就可做成一致收敛及非一致收敛级数的例子. 我们再添加下面这一个简单的例子.

5) 我们来看等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$; 它在开区间 $\mathscr{X} = (1, -1)$ 内收敛. 对 $\mathscr{X}$ 内任何 x 值第 n 项后余项如下: $\varphi_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x}$.

如果 n 任意指定, 则显然

$$\lim_{x \to -1+0} |\varphi_n(x)| = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 1-0} \varphi_n(x) = \infty.$$

两式都表示, 要在同一序号 n 之下对所有 x 同时实现不等式

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon \quad \left(\varepsilon < \frac{1}{2}\right)$$

是不可能的. 故该级数在区间 $(-1, 1)$ 内是非一致收敛的; 分别对区间 $(-1, 0]$ 及 $[0, 1)$ 来说也是如此.

265. 一致收敛性条件 那个建立数序列有限极限存在条件的波尔查诺 – 柯西定理 ("收敛性原理") [**52** 段] 可以很自然地化为下面这个在区域 $\mathscr{X}$ 内函数序列 (1) 的一致收敛性条件:

*要序列 (1) 1) 有一极限函数, 而且 2) 对区域 $\mathscr{X}$ 内的 x 值**一致**收敛于这个函数, 则必须且只需对每一 $\varepsilon > 0$ 存在这样一个与 x **无关**的序号 N, 使在 $n > N$ 时并在任何 $m = 1, 2, 3, \cdots$ 之下不等式*

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{7}$$

*对 $\mathscr{X}$ 内**所有** x 值都同时成立.*

这条件也可简单陈述为: 要序列 (1) 的收敛性原理对 $\mathscr{X}$ 内所有 x 值都一致地实现.

证明 必要性 如果序列 (1) 有一极限函数 $f(x)$ 并且在 $\mathscr{X}$ 内一致收敛于它, 则对任一给定的 $\varepsilon > 0$ 恒可找到这样一个与 x 无关的序号 N, 使在 $n > N$ 时对所有 x

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

同样得

$$|f_{n+m}(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (m = 1, 2, 3, \cdots),$$

而由这两个不等式有 (7).

充分性 设定理中所指条件实现. 于是对 $\mathscr{X}$ 内任何固定的 x 值序列 (1) 就成为一个满足波尔查诺 – 柯西条件的数序列. 所以对这序列存在一个有限极限, 这也就证明了序列 (1) 有一个极限函数 $f(x)$.

现在我们任意取一个 $n > N$ 并取一个 $\mathscr{X}$ 内的 x 而令不等式 (7) 里的 m 无限增大 (n 与 x 保持不变). 取极限得

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

这证明了 $f_n(x)$ 一致趋于 $f(x)$.

所证明的条件不难转述为函数级数的情形:

要级数 (3) 在区域 $\mathscr{X}$ 内**一致**收敛, 其必要而充分的条件是要对每一数 $\varepsilon > 0$ 恒有这样一个**与** x **无关**的序号 N, 使在 $n > N$ 及任何 $m = 1, 2, 3, \cdots$ 之下不等式

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon \tag{8}$$

对 $\mathscr{X}$ 内所有 x 都同时成立.

实际上要确定具体序列或级数的一致收敛性, 则采用应用起来比较方便的充分检验法, 这通常是对级数来陈述的.

这里是一个最简单最常用的检验法:

魏尔斯特拉斯检验法 如果函数级数 (3) 各项在区域 $\mathscr{X}$ 内满足不等式

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{9}$$

而 c_n 是某**一收敛**数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots \tag{C}$$

的一般项, 则级数 (3) 在 $\mathscr{X}$ 内**一致**收敛.

若具备不等式 (9), 则级数 (3) 称为被级数 (C) 所控制, 或者说, (C) 是 (3) 的控制级数.

事实上由 (9) 我们得一个不等式

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+m}(x)| \leqslant c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+m},$$

它同时对区域 $\mathscr{X}$ 内所有 x 都成立. 将收敛性原理应用于数级数 (C), 对任一 $\varepsilon > 0$ 恒可找到这样一个 N, 使在 $n > N$ 时上面不等式右边已小于 ε, 从而左边也小于 ε, 并且是同时对所有 x 都如此. 由此, 根据上面所证明的条件就推出我们的论断.

如此, 只要级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则在任何区间内像

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

这样的级数也就一致收敛. 这是因为

$$|a_n \sin nx| \leqslant |a_n|, \quad |a_n \cos nx| \leqslant |a_n|,$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 起了控制级数的作用.

§2. 级数和的函数性质

266. 级数和的连续性 我们现在来讨论由函数组成的级数之和的函数性质, 这些性质是与组成函数有关的. 上面已经指出过序列观点与无穷级数观点的等价性. 本书宁可取后一观点进行讲解, 因为实用上所遇到的几乎全是无穷级数. 要把对函数级数所说的话搬到函数序列上去是不难的.

上面所引入的一致收敛性概念在全部下文中将起决定性的作用, 如此它的重要性将充分地表现出来.

我们先从由连续函数所组成的级数之和的连续性问题开始. 读者知道, 有限个连续函数之和是连续函数 [**62** 段]; 那么这样的话对无穷多个函数的情形也成立吗? 下面这个简单的例子告诉我们并不永远如此.

我们试看级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x) = (1-x) + x(1-x) + \cdots + x^{n-1}(1-x) + \cdots \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

当 $x = 1$ 时此级数各项连同其总和全化为 0; $x < 1$ 时则总和为 1. 虽然级数各项在区间 $[0, 1]$ 内连续, 但在点 $x = 1$ 处级数之和有了间断. 在此级数的收敛性不一致, 因为 n 项以后级数余项 $x^n (x < 1)$ 非一致地趋于 0 [**264** 段, 3)].

定理 1 如果函数 $u_n(x) (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 在区间 $\mathscr{X} = [a, b]$ 内有定义并且连续, 而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{1}$$

在 $\mathscr{X}$ 内**一致**收敛于其和 $f(x)$, 则此和在区间 $\mathscr{X}$ 内连续.

证明 在区间 $\mathscr{X}$ 内任取一点 x_0 而来确定函数 $f(x)$ 在该点的连续性. 保持以前的表示法我们有

$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x). \tag{2}$$

这里 $n = 1, 2, 3, \cdots$, 而 x 是 $\mathscr{X}$ 内的任何值; 特别地

$$f(x_0) = f_n(x_0) + \varphi_n(x_0),$$

由此有

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_0)| + |\varphi_n(x)| + |\varphi_n(x_0)|. \tag{3}$$

现在给定一个 $\varepsilon > 0$. 由于该级数的一致收敛性可以指定一个序号 n, 使不等式

$$|\varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

在区间 $\mathscr{X}$ 的所有 x 值上都成立 (也包括 $x = x_0$ 在内). 在固定的 n 之下函数 $f_n(x)$ 是某有限个在点 $x = x_0$ 上连续的函数 $u_k(x)$ 之和. 所以它在该点上也连续, 并且对任一给定的 $\varepsilon > 0$ 可找到这样一个 $\delta > 0$, 使在 $|x - x_0| < \delta$ 时有

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

于是, 由 (3), (4) 及 (5), 不等式 $|x - x_0| < \delta$ 引出

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

这就证明了本定理[1].

附注 我们在实例上已看出, 如果略去级数的一致收敛性条件则本定理可不正确. 但是一致收敛性在本定理中只是充分条件, 不要以为这条件对级数和的连续性也是必要的. 例如, 级数

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} 2x[n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2x^2}], \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

[参看 **264** 段, 4) 及 2)] 在区间 $[0,1]$ 内有一连续和恒等于 0, 虽然在该区间内两级数的收敛都不一致.

不难将所证明的定理转述为函数序列的情形:

定理 1* *如果函数*

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots, \tag{7}$$

*在区间 $\mathscr{X} = [a,b]$ 内有定义并且连续, 而序列 (7) 在 $\mathscr{X}$ 内**一致**收敛于极限函数 $f(x)$, 则此函数 $f(x)$ 也在 $\mathscr{X}$ 内连续.*

267. 正项级数的情形 对这种特殊类型的级数, 如迪尼[2]所证明的, 一致收敛就是级数和的连续性的充分而又必要的条件:

定理 2 *设级数 (1) 各项在区间 $\mathscr{X} = [a,b]$ 内连续而且**非负**. 如果该级数有总和 $f(x)$, 且 $f(x)$ 也在区间 $\mathscr{X}$ 内连续, 则该级数在此区间内**一致**地收敛.*

[1] 这里实际上证明的是, 由某点上级数各项的连续性可推出其和在该点上的连续性.

[2] U. Dini (1845—1918) 是意大利数学家.

证明 我们来看级数 (1) 的余项:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x).$$

函数 $\varphi_n(x)$ 既为两连续函数之差, 也是连续的. 因该级数各项都是正的, 故在 x 值固定时序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 是递减的 (非递增的):

$$\varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x) \geqslant \cdots \geqslant \varphi_n(x) \geqslant \varphi_{n+1}(x) \geqslant \cdots.$$

最后, 由于级数 (1) 在区间 $\mathscr{X}$ 内收敛, 故对任何常数 x 有

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

为了确立该级数的一致收敛性, 只要证明, 对每一 $\varepsilon > 0$ 至少有一个 n 使同时对所有 x 都有 $\varphi_n(x) < \varepsilon$ (因此时对更大的 n 值此不等式成立更不成问题).

这一点我们用反证法来证明. 设对某一 $\varepsilon > 0$ 这样的 n 不存在. 于是在任何 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 之下在区间 $\mathscr{X}$ 内可找到这样一个值 $x = x_n$, 使 $\varphi_n(x) \geqslant \varepsilon$. 对序列 $\{x_n\}$ 中所有元素完全包含在有限区间 $\mathscr{X}$ 内, 我们应用波尔查诺 – 魏尔斯特拉斯引理 [**51** 段], 由该序列抽出一个收敛于极限 x_0 的子序列 $\{x_{n_k}\}$.

由 $\varphi_m(x)$ 的连续性我们有

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0),$$

而不论 m 是什么值. 另一方面, 在任何 m 之下, 对充分大的 k 有:

$$n_k \geqslant m, \text{ 如此 } \varphi_m(x_{n_k}) \geqslant \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon.$$

在此取 $k \to \infty$ 时的极限我们得

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0) \geqslant \varepsilon.$$

而这不等式在任何 m 之下均成立, 这与

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x_0) = 0$$

矛盾. 如此本定理获证.

如果将迪尼定理转述为序列的情形则得

定理 2* *设由在区间 $\mathscr{X} = [a, b]$ 内连续的函数所组成的序列 (7) 在 $n \to \infty$ 时趋于极限函数 $f(x)$, 且***单调递增**:

$$f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x).$$

*如果函数 $f(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 内也连续, 则 $f_n(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 内***一致***收敛于 $f(x)$.*

268. 逐项取极限 我们还讲一个定理, 它是定理 1 的推广. 其中 $\mathscr{X}$ 是任意的无穷集合, 有一个聚点 a (有限或无限) [**32** 段]; 这个点本身也可不属于集合 $\mathscr{X}$.

定理 3 设函数 $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 每个都在区域 $\mathscr{X}$ 内有定义并且在 x 趋于 a 时各有一有限极限:

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = c_n. \tag{8}$$

如果级数 (1) 在区间 $\mathscr{X}$ 内一致收敛, 则 1) 由这些极限所组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C \tag{C}$$

也收敛并且 2) 级数 (1) 之和 $f(x)$ 在 $x \to a$ 时也有一极限, 即

$$\lim_{x \to a} f(x) = C. \tag{9}$$

证明 按 **265** 段一致收敛性条件, 对一个任取的 $\varepsilon > 0$ 存在有这样一个序号 N, 使在 $n > N$ 且 $m = 1, 2, 3, \cdots$ 时 **265** 段中的不等式 (8) 对 $\mathscr{X}$ 内所有 x 值都成立. 在此取 $x \to a$ 时的极限, 并考虑到由 (8) 得

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+m}| \leqslant \varepsilon,$$

如此对级数 (C) 实现了 **242** 段的收敛性条件.

如果 C, C_n 及 γ_n 各如惯例表示其和、部分和及余项, 则

$$C = C_n + \gamma_n.$$

由 (2) 减这个等式不难得出:

$$|f(x) - C| \leqslant |f_n(x) - C_n| + |\varphi_n(x)| + |\gamma_n|. \tag{10}$$

由于级数 (1) 的一致收敛性及级数 (C) 的收敛性, 对任何 $\varepsilon > 0$ 恒可指定一个如此大的 n, 使对 $\mathscr{X}$ 内的所有 x 有:

$$|\varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ 而也有 } |\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{11}$$

因为, 显然

$$\lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k = C_n,$$

故 —— 在 a 有限的情形 —— 可找到这样一个 $\delta > 0$, 使在 $|x - a| < \delta$ 时有

$$|f_n(x) - C_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{12}$$

于是, 在所指示的 x 值之下由于 (10), (11) 及 (12) 成立不等式

$$|f(x)-C|<\varepsilon,$$

这就可得到 (9)[①].

等式 (9) 可以写成这形式 [参看 (8)]:

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\{\lim_{x\to a}u_n(x)\}.$$

如此, 在一致收敛时函数级数和的极限就等于由各项的极限所组成的级数之和, 换句话说, 在函数级数中可以 "逐项" 取极限.

例 作为这一般定理的应用实例, 我们来推导读者所熟悉的对数级数 [**256** 段, (21)], 由二项式级数 [**258** 段, (26)] 出发, 而借助极限关系 [**65** 段, 2)]

$$\ln a=\lim_{k\to\infty}k(\sqrt[k]{a}-1).$$

(其实欧拉在其《分析引论》里就是这样导出对数级数的, 但当然没有严格的根据.)

我们令 $a=1+x$ ($|x|<1$) 而 $(1+x)^{\frac{1}{k}}$ 代之以其展开式

$$(1+x)^{\frac{1}{k}}=1+\frac{1}{k}x+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\cdots+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{k}-n+1\right)}{1\cdot 2\cdot\ \cdots\ \cdot n}x^n+\cdots,$$

于是 $\ln(1+x)$ 表示为下式在 $k\to\infty$ 时的极限:

$$\begin{aligned}k[(1+x)^{\frac{1}{k}}-1]=x-\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{x^3}{3}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right)-\cdots\\+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n-1)k}\right)+\cdots.\qquad(13)\end{aligned}$$

要注意, 在此 x 表示一个常数. 这级数各项含有正整数参变量 k 作为变量. 在其整个变域内[②]级数 (13) 一致地收敛, 这 (按魏尔斯特拉斯检验法) 可由下一事实推知: 它由级数

$$|x|+\frac{|x|^2}{2}+\frac{|x|^3}{3}+\cdots+\frac{|x|^n}{n}+\cdots\quad(x=\text{常数},\ |x|<1)$$

所控制, 后者已经不包含 k. 在这情形, 按定理 3 可在级数 (13) 里逐项取 $k\to\infty$ 时的极限, 这就导出对数级数.

269. 级数的逐项积分 现在我们来讨论收敛的函数级数和的积分问题.

---

①读者应知这种论证法是在证明定理 1 时已经用过的.

②要记得在定理 3 里所说到的变量 x 的变域 $\mathscr{X}$ 可以是随便怎样的; 特别是它可以是正整数集而 $a=+\infty$.

定理 4 如果函数 $u_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$ 在区间 $\mathscr{X}=[a,b]$ 内连续, 并且它们所组成的级数 (1) 在此区间内**一致**收敛, 则级数 (1) 之和 $f(x)$ 的积分可表示成这样:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx \\ &= \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)dx + \cdots. \end{aligned} \tag{14}$$

证明 既然函数 $u_n(x)$ 及 $f(x)$ 都是连续的 [**266** 段, 定理 1] 所有这些积分显然都存在. 将恒等式

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \varphi_n(x)$$

在区间 $[a,b]$ 内积分, 得到

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)dx + \int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

如此, 级数 (14) 的 n 项之和与积分 $\int_a^b f(x)dx$ 相差就在余项 $\int_a^b \varphi_n(x)dx$. 要证明展开式 (14) 只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx = 0. \tag{15}$$

既然级数 (1) 是一致收敛的, 则对任何 $\varepsilon > 0$ 必可找到这样一个序号 N, 使在 $n > N$ 时对区间 $\mathscr{X}$ 内所有 x 值都有

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon.$$

于是对同样那些 n 值有

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |\varphi_n(x)|dx < (b-a)\varepsilon,$$

这就证明了极限关系式 (15).

等式 (14) 可以写成这样:

$$\int_a^b \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_a^b u_n(x)dx\right\},$$

如此, 对于一个一致收敛的函数级数, 和的积分就等于各项的积分所组成级数之和, 换句话说, 在这情形级数可以逐项积分.

附注 也如定理 1 的情形, 一致收敛性的要求对展开式 (14) 的成立是重要的, 即不能随便略去, 但仍然不是必要的. **266** 段的级数 (6) 恰可作这情况的例证. 这两个级数在区间 $[0,1]$ 内都非一致地收敛于函数 $f(x)=0$. 但第一个级数逐项积分起来我们得积分级数之和为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2n^2x\cdot e^{-n^2x^2}dx=\lim_{n\to\infty}(1-e^{-n^2})=1,$$

虽然

$$\int_0^1 f(x)dx=0;$$

但对第二级数则可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{2n}=0=\int_0^1 f(x)dx.$$

例 我们来把所谓第一类型的完全椭圆积分

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

按模 k $(0<k<1)$ 的幂展开.

由 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 的二项式级数展开式出发 [**258** 段] 并令其中 $x=-k^2\sin^2\varphi$, 得

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}k^{2n}\cdot\sin^{2n}\varphi.$$

这个级数关于 φ 一致收敛, 因为它被收敛级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}k^{2n}$ 所控制, 所以这里允许在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内依 φ 逐项积分. 积分出来并利用已知积分 [**187** 段]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi d\varphi=\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

如此得到

$$F(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right]^2\cdot k^{2n}\right\}.$$

这个展开式 —— 特别是在 k 不大时 —— 可以应用于近似计算.

我们仿定理 4 对序列陈述其类似的定理如下:

定理 4* 如果函数序列 (7) 各项在区间 $\mathscr{X}=[a,b]$ 内连续并在 $\mathscr{X}$ 内一致收敛于极限函数 $f(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx. \tag{16}$$

这等式也可写成

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\left\{\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right\}dx,$$

如此, 关于积分的极限过程可直接施于被积函数. 在这情形我们说, 容许积分号下取极限.

在第十八章我们将以较一般的形式再提出这个问题.

270. 级数的逐项微分 借助前一段的定理 4 不难证明下面这个定理:

定理 5 设函数 $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 在区间 $\mathscr{X}=[a,b]$ 内有定义并在其中有连续导函数 $u_n'(x)$. 如果在这区间内不但级数 (1) 收敛, 并且下面的由导函数所组成的级数还**一致**收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots + u_n'(x) + \cdots, \tag{17}$$

则级数 (1) 之和 $f(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 内也有导函数, 并且

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{18}$$

证明 我们以 $f^*(x)$ 表示级数 (17) 之和; 由定理 1 这是一个 x 的连续函数. 现在应用定理 4 将级数 (17) 在区间 $[a,x]$ 内 (x 是 $\mathscr{X}$ 内的任意一值) 逐项积分起来, 如此得

$$\int_a^x f^*(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)dt.$$

但显然

$$\int_a^x u_n'(t)dt = u_n(x) - u_n(a),$$

如此

$$\begin{aligned}\int_a^x f^*(t)dt &= \sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x) - u_n(a)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = f(x) - f(a).\end{aligned}$$

既然左边的积分因被积函数连续而有导函数 $f^*(x)$ [**183** 段, 12°], 因此与该积分只差一常数的函数 $f(x)$ 也即有同样的导函数.

如果仿照柯西以 D 表示导数则等式 (18) 可写成

$$D\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} Du_n(x).$$

如此, 在所指出条件之下, 级数之和的导数就等于由其各项导数所组成的级数之和, 换句话说, 这样的级数容许 "逐项" 微分.

附注 我们来看级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[e^{-(n-1)^2x^2} - e^{-n^2x^2}]$$

及

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)-\frac{1}{2(n-1)}\ln(1+(n-1)^2x^2)\right].$$

第一个级数在 $x=0$ 时收敛于 0, 在其余点上收敛于 1, 而第二级数之和处处都等于 0. 如果逐项微分起来, 则得出 **266** 段的已知级数 (6), 在全区间 $[0,1]$ 内收敛于 0, 但二者都非一致收敛. 在第一情形导数所组成的级数在 $x=0$ 也收敛, 而在这里原级数之和则不能有导数, 因为在这点上不连续. 在第二情形则相反, 逐项微分可处处得正确结果. 这些例子说明了 "要导函数级数一致收敛" 这个条件的地位: 它是重要的, 但不是必要的.

读者自己可将定理 5 转述为函数序列的情形.

所有这些关于逐项取极限、逐项积分及微分的定理建立了函数级数与有限个函数和之间的相似性. 但这相似性要受某些条件的限制, 在这些条件中一律都要用到一致收敛.

271. 不可导连续函数一例 在这一节的结尾我们利用函数级数来举一个在任何点上都没有导函数的连续函数的例子.

第一个这种例子属于魏尔斯特拉斯, 它发表于 1875 年①; 他的函数由下面的级数来定义:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x),$$

这里 $0<a<1$, 而 b 是一个奇数 (并且 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$). 这级数被收敛级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n$ 所控制, 所以 [**265** 段; **266** 段, 定理 1] 是一致收敛的, 并且它的和处处是 x 的连续函数. 魏尔斯特拉斯经过精细研究, 终于证明这函数在任何点上都没有导数.

我们举一个范德瓦尔登 (van der Waerden) 所建立的更简单的例子, 它本质上也是以同样想法做成的, 只是振动曲线 $y=\cos\omega x$ 换成了振动折线.

如此, 我们以 $u_0(x)$ 表示 x 与其最近整数间之差的绝对值. 这函数在每一个 $\left[\frac{s}{2},\frac{s+1}{2}\right]$ 这样的区间内 (s 是整数) 都成线性函数; 它是连续的并且有周期 1. 它的图像是一条折线, 如图 4(a); 折线各节有斜率 ± 1.

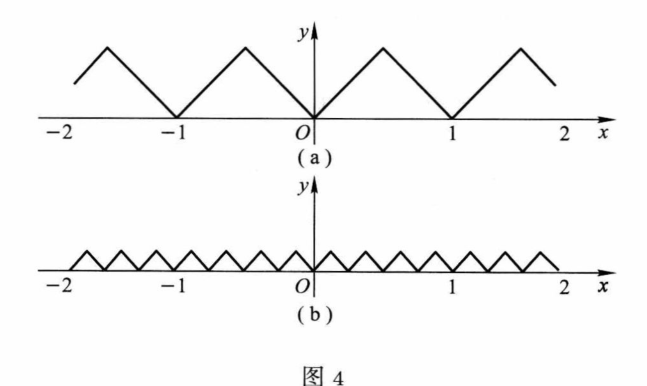


图 4

①但这里波尔查诺也赶过了他, 波氏更早做出类似的函数 (1830 年).

然后令 $k=1,2,3,\cdots$,

$$u_k(x)=\frac{u_0(4^kx)}{4^k}.$$

这函数在 $\left[\frac{s}{2\cdot 4^k},\frac{s+1}{2\cdot 4^k}\right]$ 这样的区间内是线性的; 它也是连续的并且有周期 $\frac{1}{4^k}$. 它的图像也是折线, 但锯齿较小; 例如在图 4(b) 上所表示的是函数 $u_1(x)$ 的图像. 在所有情形折线各节的斜率也等于 ± 1.

现在我们用下式来对 x 的所有实值定义一个函数 $f(x)$:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x).$$

因为显然 $0\leqslant u_k(x)\leqslant \frac{1}{2\cdot 4^k}$ $(k=0,1,2,\cdots)$, 而该级数被收敛级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 4^k}$ 所控制, 故 (也如魏尔斯特拉斯函数的情形) 该级数一致收敛, 并且函数 $f(x)$ 处处连续.

现在来看任意值 $x=x_0$ 上的情形. 算出 x_0, 精确到 $\frac{1}{2\cdot 4^n}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 以内, 如此我们将它限于这样两数之间:

$$\frac{s_n}{2\cdot 4^n}\leqslant x_0\leqslant \frac{s_n+1}{2\cdot 4^n},$$

这里 s_n 是一个整数. 显然, 闭区间

$$\Delta_n=\left[\frac{s_n}{2\cdot 4^n},\frac{s_n+1}{2\cdot 4^n}\right]\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

是一个套一个的. 在每一区间内可找到这样一点 x_n, 使其与点 x_0 的距离等于这个区间长的一半:

$$|x_n-x_0|=\frac{1}{4^{n+1}}.$$

显然, 随着 n 的增大变量 $x_n\to x_0$.

现在我们来做出增量比:

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}.$$

但当 $k>n$ 时 $\frac{1}{4^{n+1}}$ 是函数 $u_k(x)$ 的周期 $\frac{1}{4^k}$ 的整数倍, 所以 $u_k(x_n)=u_k(x_0)$, 该级数相应项为 0 而可忽略. 如果 $k\leqslant n$, 则在区间 Δ_k 内的线性函数 $u_k(x)$ 在所包含的区间 Δ_n 内也是线性的, 而

$$\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}=\pm 1\quad (k=0,1,\cdots n).$$

如此最后我们有

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{n}(\pm 1).$$

换句话说, 这个比值在 n 为奇数时为偶数, 在 n 为偶数时为奇数. 由此显然, 在 $n\to\infty$ 时这增量比不能趋于任何有限极限, 故该函数在 $x=x_0$ 无有限导数.

§3. 幂级数及多项式级数

272. 幂级数收敛区间 前段所讲的理论在研究幂级数的性质时有一重要的应用, 这种级数或依变量的升幂排列:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{1}$$

或一般情形依二项式 $x - x_0$ 的升幂排列:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots \tag{2}$$

($a_0, a_1, a_2, \cdots$ 在此表示常数系数). 这类级数的具体例子我们已屡次遇到过 (特别是见第十五章, §6). 现在我们以一般的形式来讨论这所谓表出函数的分析工具. 显然, 我们只要讨论级数 (1) 就行了, 因为级数 (2) 可由变量替换化为 (1).

我们首先试图来搞清楚幂级数 "收敛区域" 的构造, 即那些使级数 (1) 收敛的变量值 $x = \overline{x}$ 的集合 $\mathscr{X} = \{\overline{x}\}$ 的构造. 为此给出下面这一引理:

引理 如果级数 (1) 对那些异于 0 的值 $x = \overline{x}$ 收敛, 则它对任何满足不等式 $|x| < |\overline{x}|$ 的 x 值**绝对**收敛.

由级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{x}^n = a_0 + a_1 \overline{x} + a_2 \overline{x}^2 + \cdots + a_n \overline{x}^n + \cdots$$

的收敛性推知, 其通项趋于 0 [**235** 段, 5°], 所以 [**36** 段, 5)]:

$$|a_n \overline{x}^n| \leqslant M \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

现在我们取任一 x, 使 $|x| < |\overline{x}|$, 而做成级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots. \tag{4}$$

因为 [参看 (3)]:

$$|a_n x^n| = |a_n \overline{x}^n| \cdot \left|\frac{x}{\overline{x}}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{x}{\overline{x}}\right|^n,$$

并且级数 (4) 各项都小于下面的收敛几何级数 (公比为 $\left|\frac{x}{\overline{x}}\right| < 1$) 的相应项:

$$M + M \cdot \left|\frac{x}{\overline{x}}\right| + M \cdot \left|\frac{x}{\overline{x}}\right|^2 + \cdots + M \cdot \left|\frac{x}{\overline{x}}\right|^n + \cdots,$$

故按 **237** 段的定理 1 级数 (4) 收敛. 在这情形, 我们知道, 级数 (1) 绝对收敛, 这就是要证明的.

在 $x=0$ 时显然任何级数 (1) 都收敛. 但也有在此以外的任何 x 值上都不收敛的幂级数. 这种 "处处发散" 的级数的例子有 $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$, 对此我们不难用达朗贝尔检验法证实. 对这类级数我们不感兴趣.

我们假设, 使级数 (1) 收敛的变量值 $\overline{x}$ 中有异于 0 的. 我们来考虑这个集 $\{|\overline{x}|\}$; 它可以上有界或上无界.

在后一情形, 不论取怎样的 x 值, 必能找到这样一个 $\overline{x}$, 使 $|x|<|\overline{x}|$, 于是按引理对所取 x 值该级数绝对收敛. 该级数成为 "处处收敛" 的.

现在设集合 $\{|\overline{x}|\}$ 上有界, 并且 R 是它的上确界 (如此 $0<R<+\infty$). 如果 $|x|>R$, 则此 x 值一定异于所有 $\overline{x}$, 而该级数发散. 现在取任一 x, 使 $|x|<R$. 按确界定义 [**6** 段], 必定能找到这样一个 $\overline{x}$, 使 $|x|<|\overline{x}|\leqslant R$; 而由此按引理又推知级数 (1) 绝对收敛.

如此, 证明了下面这个一般的

定理 *对于每个幂级数 (1), 只要它不是处处发散的, 就存在这样一个正数 R (它也可成为 $+\infty$), 使*

*该级数在 $|x|<R$ 时**绝对**收敛,*

而在 $|x|>R$ $(R<\infty)$ 时发散.

此数 R 称为级数的*收敛半径*.

由此解决了级数的 "收敛域" $\mathscr{X}$ 的问题: 它就是由 $-R$ 至 R 这整个区间; 只对其端点还不能作一般的结论: 由实例可见, 在端点上可以 (绝对或非绝对) 收敛, 也可以发散. 区间 $\mathscr{X}$ 称为该级数的*收敛区间*.

对于处处发散的级数认为 $R=0$: 其 "收敛区间" 缩为一点 $x=0$.

例 1) 对级数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$R=+\infty$, 收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$ [**253** 段].

2) 在几何级数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

的情形 $R=1$, 收敛区间为 $(-1,+1)$, 两端点均除外.

3) 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

有 $R=1$, 收敛区间为 $[-1,+1]$, 两端均在内, 但在端点上的收敛*不是绝对的* [**255** 段].

4) 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$R = 1$; 收敛区间为 $(-1, +1]$, 左端除外, 而右端上为非绝对收敛 [**256** 段].

5) 最后, 看级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2};$$

这里也有 $R = 1$, 收敛区间为 $[-1, +1]$, 在两端此级数也绝对收敛 (因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛).

所有以上所说的对一般的级数 (2) 仍然有效, 只是点 0 的地位代之以点 x_0, 而收敛区间则由 $x_0 - R$ 延伸至 $x_0 + R$ (端点是否在内则视情形而定).

附注 如果重复所述论证于级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots, \tag{1a}$$

此处级数依复变量 z 的方幂排列, 系数也是复数 [**254** 段], 则对这种级数这个定理也成立: 对每一级数 (1a) (处处发散的情形除外) 都存在这样一个实数 R $(0 < R \leqslant +\infty)$, 使 $|z| < R$ 时该级数绝对收敛, 而 $|z| > R$ 时发散. 但在 "复数平面" 上 $|z| < R$ 的点充满一个半径为 R 的圆 (中心在点 $z = 0$); 如此这里 (代替收敛区间的地位) 出现了收敛圆, 而收敛半径这个名称的来源也就明白了.

273. 幂级数和的连续性 设级数 (1) 有收敛半径 $R > 0$. 首先可以断言:

1°. *无论取怎样一个正数 $r < R$, 级数 (1) 必对闭区间 $[-r, r]$ 内的 x* **一致**收敛.

事实上, 因为 $r < R$, 故在 $x = r$ 时级数 (1) 绝对收敛, 也即下列正项级数收敛:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n = |a_0| + |a_1| \cdot r + |a_2| \cdot r^2 + \cdots + |a_n| \cdot r^n + \cdots. \tag{5}$$

在 $|x| \leqslant r$ 时级数 (1) 各项绝对值不超过这级数的各相应项, 如此它就起控制级数的作用而按魏尔斯特拉斯检验法级数 (1) 对所指那些 x 值一致收敛.

虽然 r 可以取得随意接近于 R, 但由所证明的仍然不能推出在区间 $(-R, R)$ 内的一致收敛性, 这只要找一个级数为例 [**264** 段, 5)] 就可明白.

现在, 作为 **266** 段的定理 1 的推论我们得:

2°. *幂级数 (1) 之和 $f(x)$ 在其收敛区间内是一个 x 的连续函数.*

无论在收敛区间 $(-R, R)$ 内取怎样的值 $x = x_0$, 总可以选取这样一个数 r $(0 < r < R)$, 使 $|x_0| < r$. 将定理 1 应用于区间 $[-r, r]$ 内, 则我们由 1° 可确定函数在此区间内连续, 所以特别是在 $x = x_0$ 时也连续.

[读者注意, 我们避免应用定理 1 于区间 $(-R, R)$ 内, 因为这里不能保证一致连续.]

幂级数和的连续性可以用来证明关于*幂级数恒等的定理* (试回忆关于多项式的类似定理):

3°. 如果两个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

及

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

在点 $x=0$ 邻近[①]有同一个总和, 则这两个级数**恒等**, 即相应系数两两相等:

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \cdots, \quad a_n = b_n, \cdots.$$

在下列恒等式里令 $x=0$:

$$a_0 + a_1 x + \cdots = b_0 + b_1 x + \cdots,$$

如此立即看出 $a_0 = b_0$. 舍弃这两项, 并两边除以 x (此时要认为 $x \neq 0$) 而得一新恒等式

$$a_1 + a_2 x + \cdots = b_1 + b_2 x + \cdots,$$

它在点 $x=0$ 邻近也成立, 但这一点本身除外, 因此我们不能在这恒等式里不加说明就令 $x=0$. 只是由于两级数和在 $x=0$ 时的连续性我们才能断定在所除去的一点上这恒等式仍然成立, 于是令 $x=0$ 而得 $a_1 = b_1$. 舍弃这两项, 除以 x 并再依据连续性 (如刚才一样) 而得 $a_2 = b_2$, 如此进行下去. 由数学归纳法可证明这个一般的结论.

这个定理建立了函数的幂级数展开式的唯一性, 它最初是由欧拉指出的.

274. 收敛区间端点上的连续性 现在我们来考虑关于幂级数 (1) 在收敛区间端点 $x = \pm R$ 附近的性态这一较精致的问题 (R 假定是有限的). 在此我们不妨限于讨论其右端 $x = R$; 但只要将 x 换作 $-x$ 即可将所有论证搬到 $x = -R$ 的情形.

作为关于幂级数在开区间 $(-R, R)$ 内的连续性的定理 2° 的补充, 我们有下列定理:

4°. **阿贝尔[②]定理** 如果幂级数 (1) 在 $x = R$ 收敛 (可以非绝对收敛), 则其和在此点上左方连续, 即

$$f(R-0) = \lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

本来可先证明, 由本定理的假设可推出级数 (1) 在闭区间 $[0, R]$ 内一致收敛, 然后应用 **266** 段的一般定理 1. 但我们采取直接证明法.

不失一般性, 可认为 $R=1$ (只要以 Rx 代 x 问题就可化为这种情形). 于是, 知道了级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$$

[①]这里所指的不仅是点 $x=0$ 的双侧邻近 (邻域) $(-\delta, \delta)$, 也指其单侧邻近如 $[0, \delta)$ 或 $(-\delta, 0]$.

[②]Niels Henrik Abel (1802—1829) 是挪威数学家.

收敛, 只要来证明

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$$

就行了. 因此, 设 $0<x<1$, 按柯西法则将级数 (1) 乘以

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},$$

如此得

$$\frac{1}{1-x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n,\quad 而\ A_n=a_0+a_1+\cdots+a_n.$$

现在将级数

$$A=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}Ax^n$$

与

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$$

逐项相减, 并令 $A-A_n=\alpha_n$, 而得恒等式

$$A-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nx^n. \tag{6}$$

因为 $\alpha_n\to 0$ [**235** 段, 2°], 故对任一给定的 $\varepsilon>0$ 可找到这样一个序号 N, 使 $|\alpha_n|<\frac{1}{2}\varepsilon$, 只要 $n>N$.

我们把 (6) 式右边的级数之和分成两个和

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N}\alpha_nx^n\quad 及\quad (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_nx^n.$$

第二式容易估值并且无论 x 值如何恒有

$$\left|(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_nx^n\right|\leqslant(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}|\alpha_n|x^n<\frac{\varepsilon}{2}\cdot(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n<\frac{\varepsilon}{2}.$$

至于第一式则 $x\to 1$ 时趋于 0, 而当 x 充分接近 1 时

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{N}\alpha_nx^n\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

如此终于有

$$\left|A-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right|<\varepsilon,$$

这就证明了所说的论断.

由此从而有这样简单的推论:

推论 如果对函数 $f(x)$ 只在开区间里得到了幂级数展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad (-R<x<R),$$

但在该区间一端，比如说 $x=R$，该函数有定义且连续，并且该级数继续收敛，则该展开式对 $x=R$ 仍正确.

这不难证明，只要在上面所写的等式里取 $x\to R-0$ 时的极限就行了.

275. 幂级数的逐项积分 对于积分及微分而言，幂级数 —— 在其收敛区间范围内 —— 就如同寻常多项式的情形一样.

5°. 幂级数 (1) 在区间 $[0,x]$ 内 (这里 $|x|<R$) 恒可**逐项**积分，如此，以 $f(x)$ 表级数和则有

$$\int_0^x f(x)dx=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\cdots. \tag{7}$$

证明时我们取 r 介于 $|x|$ 与 R 之间. 由 1° 知级数 (1) 在区间 $[-r,r]$ 内一致收敛，于是按 **269** 段的定理 4 该级数在区间 $[0,x]$ 内可逐项积分.

我们举例来说明这定理的各种应用.

1) 在区间 $[0,x]$ $(|x|<1)$ 内逐项积分级数

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots,$$
$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}+\cdots,$$

立即得出展开式

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,$$
$$\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots,$$

它们在 **257** 及 **256** 段里是用比这复杂得多的方法得到的. 因为第一个级数在 $x=1$ 时收敛，而第二个在 $x=\pm1$ 时收敛，则相应展开式 (按阿贝尔定理的推论) 也就在这些值上成立.

2) 我们取函数 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 的已知幂级数展开式 [**258** 段] 并在其中以 $-x^2$ 代替 x (假定 $|x|<1$)，结果得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}x^{2n} \quad (-1<x<1).$$

现在将此级数在区间 $[0,x]$ $(-1<x<1)$ 内逐项积分，最后得一反正弦函数的新的展开式:

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}$$
$$+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ \cdots\ \cdot2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots.$$

按阿贝尔定理的推论 [**274** 段]，这个展开式在区间端点 $x=\pm1$ 上也成立，因为右边的级数在这些点上也收敛 [例如参看 **240** 段].

3) 在许多不能用初等函数表示为有限形式的积分的幂级数展开式中逐项积分起着特别重要的作用 [**165** 段].

例如, 由下面熟悉的展开式出发:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

[**253** 段, (11)], 我们得

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = x - \frac{1}{1!} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots .$$

这类展开式可成功地用来做近似计算并为不能表示为有限形式的积分编制数值表.

276. 幂级数的逐项微分 6°. 幂级数 (1) 在其收敛区间内部可逐项微分, 如此对该级数来说, 和 $f(x)$ 的导函数存在并可表示成:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots . \tag{8}$$

对任意取来的值 $x = x_0$ $(-R < x_0 < R)$, 总可选出这样两个数 r_0 及 r, 使 $|x_0| < r_0 < r < R$.

由于级数 (5) 的收敛 [**273** 段], 其通项必有界:

$$|a_n| \cdot r^n \leqslant L \quad (n = 1, 2, 3, \cdots ; L \text{ 为常数}).$$

于是在 $|x| \leqslant r_0$ 时有

$$n|a_n x^{n-1}| \leqslant n|a_n| \cdot r_0^{n-1} = n|a_n| \cdot r^{n-1} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} \leqslant L_0 \cdot n \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1}$$
$$\left(n = 1, 2, 3, \cdots ;\ L_0 = \frac{L}{r} \text{ 为常数}\right),$$

如此级数 (8) 的各项对给定的 x 值不超过控制级数

$$L_0 + L_0 \cdot 2\left(\frac{r_0}{r}\right) + L_0 \cdot 3\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \cdots + L_0 \cdot n\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} + \cdots$$

的相应项, 而这控制级数的收敛性是不难由达朗贝尔检验法来验证的 (注意 $\frac{r_0}{r} < 1$). 所以, 在区间 $[-r_0, r]$ 内由级数 (1) 各项导数所组成的级数 (8) 一致收敛, 并且按 **270** 段的定理 5, 级数 (1) 在整个区间 $[-r_0, r]$ 内都可以逐项微分, 特别是在点 $x = x_0$.

附注 我们在 5° 及 6° 里证明了级数 (7) 及 (8) 在开区间 $(-R, R)$ 内收敛, 所以, 它们的收敛半径不小于 R. 但要知道, 级数 (1) 又是由 (7) 的逐项微分及 (8) 的逐项积分得出的, 如此 R 也不能小于所说的收敛半径. 把这些事实合起来可推知三个级数 (1), (7), (8) 的收敛半径全都彼此相等.

例 为了指出定理 6° 的效用我们来看微分方程

$$xu'' + u' + xu = 0$$

(即数学物理及其应用中常遇到的所谓贝塞尔[①] 方程的一个最简单的特例). 我们来找它的一个对所有 x 值都可展为级数的解 u.

将所求函数的展开式写成带*待定系数*的级数的形式:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

并且把它看作处处收敛而进行两次逐项微分; 如此得

$$xu = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1},$$

$$u' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$xu'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1}.$$

代入该方程式而得恒等式

$$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} + n^2 \cdot a_n) x^{n-1} = 0,$$

于是, 按定理 3° 有

$$a_1 = 0, \quad n^2 \cdot a_n + a_{n-2} = 0 \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

由此, 首先按数学归纳法可知所有带奇数下标的系数 $a_{2m-1} = 0$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$. 至于带偶数下标的系数 a_{2m} 则按递归公式有

$$a_{2m} = -\frac{1}{4m^2} a_{2m-2}.$$

它们可用 a_0 表出:

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{(m!)^2 \cdot 2^{2m}} a_0.$$

如此, 除去一个任意乘数 a_0 未定外, 终于得出了级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(m!)^2 \cdot 2^{2m}}.$$

不难直接验证, 这个级数实际上是处处收敛的. 而由其得来的方法可明白, 它所表示的函数[②]满足该方程式.

读者应注意, *待定系数法*的特殊的应用: 在此系数有无限多个, 并且必须利用幂级数恒等定理, 而不是寻常所用的多项式恒等定理.

[①] Friedrich Wilhelm Bessel (1784—1846) 是德国天文学家.

[②] 这是 "零标贝塞尔函数"; 表之以 $J_0(x)$.

277. 幂级数作为泰勒级数 最后这个定理 6° 给出了幂级数重复逐次微分的可能性. 如此, 像从前一样以 $f(x)$ 表示在收敛区间内由级数 (1) 所代表的函数, 我们在这区间内部处处有:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$
$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2x + 3 \cdot a_3x^2 + \cdots + n \cdot a_nx^{n-1} + \cdots,$$
$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3x + \cdots + (n-1) \cdot n \cdot a_nx^{n-2} + \cdots,$$
$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \cdots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot a_nx^{n-3} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \cdots \ \cdot (n-1) \cdot na_n + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

如果在所有这些等式里令 $x = 0$, 则得出我们很熟悉的幂级数系数表示式:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!},$$
$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \cdots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \cdots$$

[参看 **252** 段, (7)]. 如果对一般形式 (2) 的级数来说 [**272** 段], 则这里的 $x = 0$ 需代之以 $x = x_0$. 如此:

7°. *在收敛区间内由一个幂级数所代表的函数在此区间内部具有各阶的导数. 对这函数而言, 该级数就是它的泰勒级数.*

这个值得注意的命题对我们理解前章所讨论的问题有所帮助. 我们看出, 如果一个函数能够展为幂级数, 则后者必然就是泰勒级数; 所以我们只要研究函数能否表示为其泰勒级数就行了.

278. 连续函数展为多项式级数 能展为幂级数的这一类函数是很有限的. 前段定理 7° 告诉我们, 一个在某区间内可展为幂级数的函数, 一定要在此区间内具有各阶导数; 并且这样严格的条件, 如我们在第十五章 §6 所知 [特别参看 **259** 段] 尚远不足保证展为幂级数的可能性.

对此极重要的是魏尔斯特拉斯 (于 1885 年) 所证明一个定理, 它对任意的连续函数建立了展为由多项式组成的一致收敛级数的可能性. 我们以序列的语言陈述如下:

魏尔斯特拉斯定理 *如果一个函数 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a, b]$ 内连续, 则存在一个多项式序列 $\{P_n(x)\}$, 它在这区间内***一致***收敛于 $f(x)$.*

我们先假设对区间 $[0, 1]$ 而言. 于是满足本定理要求的具体的多项式序列是:

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \cdot \mathrm{C}_n^{\nu} x^{\nu} (1-x)^{n-\nu} \text{①}. \tag{9}$$

①在魏尔斯特拉斯定理的许多证明中我们转载其最简单的一个, 它出于苏联科学院院士伯恩斯坦 (С. Н. Бернштейн) 之手. 上面所写多项式 $B_n(x)$ (它不难依函数 $f(x)$ 在有理点 $\frac{\nu}{n}$ 上的值做出) 称为函数 $f(x)$ 的 "伯恩斯坦多项式".

证明这一点时我们需要一系列简单的恒等式. 首先是, 在任何正整数 n 之下

$$\sum_{\nu=0}^{n} \mathrm{C}_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} = 1, \tag{10}$$

这可由 $(a+b)^n$ 的牛顿二项式展开公式立即得出, 只要取 $a = x, b = 1 - x$. 其次,

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu \mathrm{C}_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} = nx. \tag{11}$$

事实上, 舍弃相应于 $\nu = 0$ 一项, 其余每项都可写成

$$nx \cdot \frac{(n-1)(n-2)\cdot \ \cdots \ \cdot(\overline{n-1}-\overline{\nu-1}+1)}{1\cdot 2\cdot \ \cdots \ \cdot(\nu-1)} x^{\nu-4}(1-x)^{\overline{n-1}-\overline{\nu-1}}.$$

或者, 如果引入指数 $\mu = \nu - 1$ 则有

$$nx \cdot \mathrm{C}_{n-1}^\mu x^\mu (1-x)^{\overline{n-1}-\mu}.$$

将 nx 提出到括号外, 则括号内总和为

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^\mu x^\mu (1-x)^{\overline{n-1}-\mu}.$$

由 (10) 它就等于 1. 同样

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{n} \nu(\nu-1) \mathrm{C}_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} &= n(n-1)x^2 \cdot \sum_{\lambda=0}^{n-2} \mathrm{C}_{n-2}^\lambda x^\lambda (1-x)^{\overline{n-2}-\lambda} \\ &= n(n-1)x^2.\end{aligned} \tag{12}$$

最后, 以 n^2x^2 乘 (10), 以 $(2nx-1)$ 乘 (11) 而把这些恒等式与 (12) 逐项加起来. 结果得恒等式

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=0}^{n} [n^2x^2 - (2nx-1)\nu + \nu(\nu-1)] \cdot \mathrm{C}_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} \\ &= n^2x^2 - (2nx-1)nx + n(n-1)x^2\end{aligned}$$

或者化简后

$$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu - nx)^2 \mathrm{C}_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} = nx(1-x).$$

如果注意到对任何 x

$$x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \leqslant \frac{1}{4},$$

则得到一个不等式

$$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu - nx)^2 \cdot \mathrm{C}_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} \leqslant \frac{n}{4}, \tag{13}$$

这个结果我们就要用到.

在区间 $[0,1]$ 里任意指定一个 x 值. 由 (10) 可写

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f(x) \cdot \mathrm{C}_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu}.$$

由 (9) 逐项减此等式得

$$B_n(x)-f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\left[f\left(\frac{\nu}{n}\right)-f(x)\right]\cdot \mathrm{C}_n^{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}. \tag{14}$$

为了估计这个差数, 我们来分别地观察相应于接近 x 的点 $\frac{\nu}{n}$ 的各项及其余各项. 说得明确点, 对一个给定的数 $\varepsilon>0$—— 由于函数 $f(x)$ 的连续性从而 [**75** 段] 它的一致连续性 —— 恒可找到这样一个只与 ε 有关的数 $\delta>0$, 使

$$由|x''-x'|<\delta \text{ 即有 } |f(x'')-f(x')|<\varepsilon \quad (0\leqslant x',x''\leqslant 1).$$

这里我们将 (14) 式中的和分为两个, $\sum_1$ 及 $\sum_2$; 凡使 $\left|\frac{\nu}{n}-x\right|<\delta$ 的各项归入第一个, 凡使 $\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\geqslant\delta$ 的各项归入第二个. 在第一种情形显然 $\left|f\left(\frac{\nu}{n}\right)-f(x)\right|<\varepsilon$ 并且 [参看 (10)]

$$\left|\sum\nolimits_1\right|<\varepsilon\cdot\sum_{\left|\frac{\nu}{n}-x\right|<\delta}\mathrm{C}_n^{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}\leqslant\varepsilon\cdot\sum_{\nu=0}^{n}\mathrm{C}_n^{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}=\varepsilon.$$

在第二情形则引入 $|f(x)|$ 的最大值 M 而得出估计:

$$\left|\sum\nolimits_2\right|<2M\cdot\sum_{\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\geqslant\delta}\mathrm{C}_n^{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}.$$

但这里 $(\nu-nx)^2\geqslant\delta^2n^2$, 如此更应有

$$\begin{aligned}\left|\sum\nolimits_2\right|&<\frac{2M}{\delta^2n^2}\cdot\sum_{\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\geqslant\delta}(\nu-nx)^2\cdot\mathrm{C}_n^{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}\\&\leqslant\frac{2M}{\delta^2n^2}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu-nx)^2\cdot\mathrm{C}_n^{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}.\end{aligned}$$

最后, 利用不等式 (13) 而得出

$$\left|\sum\nolimits_2\right|<\frac{M}{2\delta^2n}.$$

如果取 $n>\frac{M}{2\delta^2\varepsilon}$, 则 (与 x 无关) 有

$$\left|\sum\nolimits_2\right|<\varepsilon,$$

于是总起来

$$|B_n(x)-f(x)|<2\varepsilon,$$

这就暂时对区间 $[0,1]$ 证明了我们所要求的结论.

至于任意区间 $[a,b]$ 的情形则可由这个简单的变量替换化为所考虑过的情形: $x=a+y(b-a)$, 这里 $0\leqslant y\leqslant 1$. 按 y 的连续函数 $f(a+y(b-a))$ 所做成的多项式 $B_n(y)$ 的序列对 $[0,1]$ 内的 y 一致收敛于它. 于是多项式 $P_n(x)=B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ 的序列将对 $[a,b]$ 内的 x 一致收敛于函数 $f(x)$. 如此本定理得证.

按寻常方式由函数序列转为函数级数 [参看 **263** 及 **264** 段], 就可把魏尔斯特拉斯定理表示为这样的形式:

每个在区间 $[a,b]$ 内的连续函数 $f(x)$ 在此区间内可展为由多项式① 组成的**一致**收敛级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n(x).$$

这类展开式在实际应用上固然比不上泰勒级数, 但由于其高度一般性却有较大的理论意义. 特别是, 由此可推知, 每个连续函数可由统一的"分析式"给出 [**18** 段, 参看 **21** 段欧拉的观点].

§4. 级数简史

279. 牛顿及莱布尼茨时期 与 17 世纪建立微积分同时 (第十四章), 无穷级数也进入了数学的实践. 我们由 1668 年在英国出现的各式各样有关对数级数的论著谈起. 在这一年里梅卡托 (Nicholas Mercator, 1620—1687) 发表了一本小书《对数技术》, 讲对数的计算法. 在最后的一章里讨论求双曲线 $xy=1$, 相对于渐近线的面积的问题. 他令 $x=1+a$, 而把双曲线方程写成

$$y=\frac{1}{1+a}.$$

梅卡托用除法将右端展为几何级数

$$\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+\cdots,$$

然后, 依 a 逐项积分而得出双曲线面积为已知的级数 [**256** 段, (21)]

$$a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\cdots.$$

关于这级数的适用范围问题则未曾提及. (在所附图上偶尔出现 $a>1$, 而此时展开式事实上不适用!) 对这问题沃利斯在其评论中有详细的讨论. 最后, 布龙克尔 (William Brouncker, 1620—1684) 以纯几何方式导出特殊公式

$$\ln 2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots.$$

为了实际计算他采用收敛较快的级数, 并且与几何级数作比较而找到了余项的界限.

牛顿开始从事无穷级数的研究比较早些, 但他在这方面的研究与其他分析领域的研究交错着进行, 我们所知是耽搁了很久才发表的. 这方面首先有他 1676 年给莱布尼茨的信及其两本奠基性的作品:《借助无穷多项方程的分析》及《流数术及无穷级数》, 这在第十四章已谈到过.

看来至迟于 1666 年, 牛顿已经通晓分数或负数指数的二项式级数. 最初他是用类比论证得出的; 根式的展开则由乘方来验证. 后来他搬用当时已知的关于十进分数理论的原理而找到幂级数的直接除法及级数的开方法. 牛顿将种种式子展为级数而将求它们流数及流量问题化为方幂的同样运算, 并由此大大扩展了他所创立的分析的适用范围.

牛顿常常采取级数的反转, 即由甲量依乙量方幂的展开式出发来建立乙量依甲量方幂的展开式. 如此, 由对数级数

$$z=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots$$

①例如, 可令 $p_1(x)=P_1(x)$, $p_n(x)=P_n(x)-P_{n-1}(x)$ $(n>1)$.

出发他得出

$$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \cdots,$$

即实质上是*指数级数* (两边各加 1 则左边得 $1+x$, 其自然对数恰好等于 z). 有趣的是, 两弦 x 依弧 z 的展开式[①]

$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \cdots,$$

牛顿是由表出弧的级数

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots$$

的逆转来求的, 即由*反正弦的展开式*来求的, 后者在牛顿看来自然比较简单, 因为它可由容易展为二项式级数 [**275** 段, 2)] 的反正弦的流数 $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 通过积分得出.

牛顿广泛用无穷级数来解代数方程以及微分方程. 他所用的方法实质上是待定系数法.

牛顿在 "分析" 里叙述了关于用级数解方程的问题而证明了该级数即收敛于方程的根. 但在另一些情形他预先将已知量展为级数而不考虑收敛性. 可是, 因为牛顿主要着重级数在近似计算中的应用, 自然他们感兴趣的不在形式地确立级数收敛的事实, 而需要它迅速地收敛. 例如, 牛顿不是用缓慢收敛级数

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

进行 $\ln 2$ 的计算, 而由公式 $\ln 2 = 2\ln 1.2 - \ln 0.8 - \ln 0.9$ 出发: 真数 $1.2, 0.8, 0.9$ 与 1 相差不大, 这就保证了对数级数的迅速收敛. 至于所产生的误差的估计牛顿并没有给出.

莱布尼茨独立地得出了牛顿早些时已知的某些展开式, 1693 年莱布尼茨精确地提出了用待定系数法 ("假设所求级数如同已经找到") 来积分微分方程. 特别是, 他由对数和正弦所满足的微分方程出发, 以这种方法重新得出了这两个函数的展开式.

1682 年莱布尼茨最先发表了表示 $\frac{\pi}{4}$ 的级数

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

这级数莱布尼茨是早已知道的[②]. 莱布尼茨顺便给出了以该级数的一节替代 $\frac{\pi}{4}$ 时误差的估计. 这些指示后来他推广到各项绝对值递减为 0 的任何交错级数的情形 (例如, 在 1714 年给约翰 · 伯努利的信里). 但是, 在此和的*存在*被看作是不言而喻的, 实际上只是确立了它可由部分和从两边交错地无限接近而已 [参看 **244** 段附注].

莱布尼茨在较晚的信札里说到 "收敛" 于其和的级数, 收敛性的理解和我们一样, 但同时他又认为级数 $1-1+1-1+\cdots$ 有总和 $\frac{1}{2}$; 这是由展开式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

取 $x=1$ 时得出的: 如果它在 $x<1$ 时正确, 则按 "连续律" 在 $x=1$ 时也该正确! 看来莱布尼茨自己也感到缺乏明确性; 难怪他在一封信里说: "…… 关于无穷级数的论证应该只在真理能按阿基米德方法用有限 (数量) 来证明时才可相信."

---

①圆的半径取为 1.

②但看来英国人葛列格里 (James Gregory, 1638—1675) 还要早些, 他于 1671 年在信里报道了反正切级数.

搞无穷级数的有莱布尼茨的两位同道 —— 伯努利兄弟 —— 尤其是哥哥雅各: 他的关于级数的作品 (1689—1704) 合起来看, 可说是叙述了当时这方面所知的一切. 特别是, 约翰在前, 雅各在后, 两人都证明了 "无穷调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

之和是无限的". 雅各 · 伯努利的证明所根据的原理与寻常一样 [**236** 段, 1)]. 他在结论中正确地强调: "末项消逝的无穷级数之和有时有限而有时无限." 当然, 这里 "末项" 应解释为通项的*极限*. 要注意的是, 雅各 · 伯努利随便利用了发散级数甚至借此得出收敛的展开式.

280. 级数理论的形式发展时期 在 18 世纪原则性的问题没有引起多大的注意, 但级数的实际知识却达到颇高的发展水平 —— 主要是出于欧拉之手.

在该世纪之初, 1715 年, 泰勒出版了一本不大的书:《正逆差分法》. 但此书由于叙述不清楚而未能立即广泛流传. 泰勒由考虑有限差出发, 然后渡向无穷小差及其比作为极限情形, 如此建立起 z 的函数 x 的增大值依变量 z 的增值 v 的方幂的展开式:

$$x+\frac{v}{1}\frac{dx}{dz}+\frac{v^2}{1\cdot 2}\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3x}{dz^3}+\cdots.$$

这个展开式后来被称为泰勒级数. 作者自己看来没有完全估计到他的发现的价值: 在书中它很少有应用之处.

这公式的意义在 1742 出版的*麦克劳林*巨著《流数论》里才显露出来. 麦克劳林循别的途径得到同样级数: 他依据带待定系数的依 x 方幂的展开式, 重复微分之并每次令 $z=0$, 逐一定出系数 [参看 **277** 段, 7°]. 他得出二项式级数作为一个例子. 在推导其他简单函数时, 麦克劳林也利用了它们所满足的微分方程.

在该论著里我们还遇到两件值得一提的事情. 第一是, 麦克劳林明白地建立了 —— 固然只是以几何的方式建立的 —— 正项级数的收敛性及发散性的*积分检验法* [后来柯西重新以分析方式证明; 参看 **241** 段]. 然后他推出了一个以积分来计算级数和的著名公式① (与欧拉不谋而合, 后者几年前也得出了这个公式).

由 1730 年起欧拉开始了一系列关于无穷级数的辉煌工作. 关于级数他写了许多篇论文, 在大半世纪的期间内陆续发表于《彼得堡科学院汇报》; 在欧拉著名的分析论著中级数也占很多位置. 我们来简略列举一下欧拉的成就, 在此不遵循年代的次序.

欧拉最先用隐约的极限过程由二项式级数 [参看 **268** 段] 出发推出了指数级数及对数级数. 用同样方法他由 $\cos nz$ 及 $\sin nz$ 的已知公式得出余弦及正弦的级数. 他将无穷幂级数与寻常多项式比拟而将它分解成因子, 如此将正弦及其他函数表示为无穷积的形式. 将熟悉的有相同首项的二项式相乘法则推广到无穷多个的情形, 他得出了值得注意的公式

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},\quad 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

及其他类似的公式. $\dfrac{1}{\sin z}$ 及 $\cot z$ 的简单分式展开式也属于欧拉 [参看下面 **406** 段附注].

欧拉也讨论了复数项的级数; 由 $\sin x, \cos x$ 及 e^x 的级数的比较他导出了联系这些函数的著名公式 [**254** 段] —— 当时拉格朗日称之为 "本世纪最美妙的分析发明之一".

①称为*欧拉 – 麦克劳林公式*. 可惜在我们这本教材中不能讲它.

欧拉对级数求和也搞得很多, 已经说过, 他在麦克劳林以前就得出著名的求和公式并且屡次反复应用. 特别是, 他曾用之于调和级数的部分和 [参看 **236** 段, 1) 及 **238** 段, 4)]. 欧拉以种种方式将级数与积分结合起来, 如此他找到了并研究了一些重要的积分, 这些积分后来即以他命名 [第十八章, §4 要讲它们].

欧拉还有一点与麦克劳林契合的地方: 麦克劳林得出其积分检验法的那种想法, 欧拉早已用来确定级数和的上下界.

在欧拉所感兴趣的其他问题中, 我提一提关于为了改善收敛性的级数变换, 关于将无穷乘积化为级数的变换 [例如参看 **251** 段, 3)]. 最后, 特别要指出的是, 欧拉不但将级数以种种方式应用于分析本身, 也应用于代数、数论及其他方面.

但是所有这些正确的卓越成就在欧拉当时还没有多少可靠的根据. 也如它的大多数同时代数学家一样, 欧拉对收敛性问题是不关心的, 并且随便利用发散级数. 例如, 将展开式

$$\frac{n}{1-n}=n+n^2+n^3+\cdots \quad 与 \quad \frac{n}{n-1}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

加起来他说下面这个两头无穷的级数

$$\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1+n+n^2+n^3+\cdots\text{①}$$

等于 0. 同样, 由等式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

出发, 欧拉不但由此推出在 $x=-1$ 时这个莱布尼茨搞过的级数

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2},$$

并且还试图使

$$1+2+4+8+\cdots=-1$$

这一在 $x=2$ 时得出的等式有意义. 但是, 欧拉自己给一个解答说, 对于这类发散级数, 不能按照像收敛级数那样的意义来理解其和 —— 不能要求它各项陆续相加时可任意接近其和. 欧拉认为 "有些无穷级数之和乃是这样一个有限表达式, 将它展开时就产生了该级数" ②. 在这种级数和的 "广义" 理解法里已经有了真理的胚胎 (而它正与最近严密奠立起来的发散级数理论相契合).

达朗贝尔尖锐地反对利用发散级数: 在他看来, 用发散级数的论证即使结果与真理符合也是 "可疑的". 但是, 在达朗贝尔看来收敛性与发散性概念本身都有 "局部性", 因为它们要看下一项绝对值是否小于前一项而定. 如此, 按他的说法, 一个级数可以收敛到某一地方然后开始发散, 反过来也行 [参看 **239** 段附注].

最后来谈谈拉格朗日 —— 这时期的最伟大数学家之一. 首先应提一提挂着他的名字的那种级数, 它给出方程式 $a-x+\varphi(x)=0$ 的根 $x=p$ 的展开式, 甚至此根的任何函数 $\psi(p)$ 的展开式.

在其《解析函数论》(1797) 这一著作里拉格朗日试图使微分学解脱 "无穷小或消逝量, 极限或流数的考虑" 而化为 "有限量的代数分析" ③. 在这尝试中即以幂级数为出发点. 设对函数 $f(x)$

①读者当然可看出, 这里完全没有能使两级数同时收敛的 n 值.

②参看欧拉《微分学》, §111.

③但是, 同样这些观念拉格朗日早先已说过.

成立展开式

$$f(x+i)=f(x)+pi+qi^2+ri^3+\cdots,$$

这里 $p,q,r,\cdots$ 是 x 的函数, 拉格朗日由通常关系式

$$p=f'(x),\quad q=\frac{f''(x)}{2},\quad r=\frac{f'''(x)}{2\cdot 3},\quad \cdots$$

出发, 直接以展开式系数来界定逐次 “导函数” (这里最先出现这个名称!). 在这基础上拉格朗日不但讲了分析, 也讲了它的几何及力学上的应用. 但这种观点未获流传. 它 —— 恰恰处在分析史新时期的开端 —— 是所有严密奠基的尝试都失败后的一种反应.

在拉格朗日同一著作里也建立了泰勒公式中余项的一个著名的便利形式. 但是, 对于拉格朗日级数的收敛性是默认的, 而这一形式不过是级数余项的一种表达式, 其用处只是便于估计由省略级数后面诸项所造成的误差而已.

级数的收敛性拉格朗日 (也和欧拉及其他同时代的人一样) 理解为通项趋于 0. 对收敛级数和他没有给出定义, 虽然它已屡次以与我们现在差不多的形式出现过, 例如在*麦克劳林* (1742 年) 及*华林* (Waring) (1776 年) 的著作里. 19 世纪初法国数学家傅里叶在其名著《热的分析理论》(1811 年完成, 1822 年出版) 里给出了级数收敛性及其和的正确定义, 在此已注意到级数各项不断减为 0 对于收敛性是完全*不充分*的. 我们已提过, 这一情况在此以前一百多年雅各 · 伯努利就已强调指出过 —— 以调和级数为例.

如此, 这个时期虽在级数论中有很丰富的成就, 而在其逻辑奠基方面则贡献很少.

281. 严密理论的建立 到下一时期 —— 19 世纪 —— 级数才成为一个独立的研究科目, 并且分析基础的批判检查在初期就已接触到它们.

在 1813 年高斯①的论著《关于级数

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

的一般研究》刊出. (这级数得到 “超几何级数” 之称.) 虽然在收敛性及发散性的理解上高斯与达朗贝尔接近, 但我们在此仍然是最早看到一个严密陈述出来的检验法, 它对上面那种级数完全解决了收敛性问题.

以极限概念为基础的级数和及*收敛性或发散性*的现代定义终于在*波尔查诺* (1817 年) 及*柯西* (1821 年) 的著作之后建立起来. 柯西在《代数分析》序里干脆说: “发散级数没有和”. 此外, 这两位学者都以一般形式建立了级数收敛性的*必要而充分*的条件 [**242** 段]. 柯西还给出了几个简单而便利的充分检验法以验证正项级数的收敛性或发散性 [**239**, **241** 段]. 后来还出现了大量这类*充分*检验法, 越来越精细, 越来越复杂②; 这种研究的兴趣到 20 世纪初才有些减弱.

其次, 属于柯西的还有关于由级数 $\sum|a_n|$ 的收敛性推出级数 $\sum a_n$ 的收敛性的论断及 “绝对” 与 “非绝对” 收敛性的区别 (虽然没有用这些名词). 非绝对收敛级数存在的例子

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

在莱布尼茨及伯努利兄弟的时候就已知道, 但柯西最先注意到非绝对收敛性反映在别的级数的性质上. 首先是, 如柯西在 1821 年已指出, 对非绝对收敛级数他的级数乘法定理可以不适用 [**248**

①Karl Friedrich Gauss (1777—1855) 是德国数学家.

②俄罗斯数学家中搞这问题的有罗巴切夫斯基 (Н. Й. Лобачевский) 及艾尔马可夫 (В. П. Ермаков, 1845—1922).

段, 3)]. 然后, 恰恰关于上面所举的级数, 柯西 (在 1833 年) 指出了, 它的收敛性可在各项调动位置时失去.

在 1837 年狄利克雷指出了一个一般的结果: 绝对收敛级数调动各项位置时收敛性及和仍保持不变 [**246** 段]. 同时他还举例指出, 在非绝对收敛的情形由于项的调动不但收敛性可能破坏, 并且即使收敛性保持时和的值也可改变. 在这方向最彻底的一般结果是黎曼所建立的 [**247** 段]; 它在 1867 年才发表出来, 这已是他死后之事了.

在柯西 (1821 年) 的《代数分析》里我们可找到关于实变及复变情形的幂级数的研究. 他不仅建立了这类级数的收敛区域的形式 (收敛区间或收敛圆), 并且还以级数的系数精确地表出收敛半径. 在收敛区域内部柯西把幂级数看作同多项式一样, 例如把它逐项微分而未觉察这还需要给出根据.

关于一般函数级数柯西试图*证明*收敛的连续函数级数和的连续性 (1821 年) 及这种级数的可以逐项积分, 而对级数收敛性的性质未加任何限制 [参看 **266** 及 **269** 段]: 一致收敛概念柯西还不知道, 并且利用无穷小语言而有时不问它们事实上依凭什么变量.

阿贝尔指出了柯西第一个论断的错误 —— 是在他关于二项式级数的著名论文里指出的. 作为一个反证的例子阿贝尔举出下面由正弦组成的级数:

$$\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots .$$

虽然它对一切实数值都收敛, 但其和在点 $x = (2m+1)\pi$ (m 为整数) 不连续. 同时关于*幂级数*阿贝尔严密证明了在使级数收敛的每一变量值之下级数和的连续性, 连此值为收敛区间端点时也计算在内 [**273**, **274** 段]. 在阿贝尔的证明过程中事实上已建立了后来称为一致收敛的那种性质的存在.

关于逐项积分*切比雪夫* (在 1845 年) 表示过他的怀疑, 他强调指出, 这样积分法 "只在特殊的情形" 可以容许. 如此逐步地建立起这种信念: 对有限和所通行的法则不能无条件地推广到无穷函数级数上去, 虽然还不清楚究竟在什么情形才可以这样做. 这里对函数级数收敛性的性质的研究及一致收敛概念的引入起了决定性的作用.

这个概念及名称看来最早是在 1841 年出现于魏尔斯特拉斯的一种作品里 (很晚才出版) 并且从此被他在讲义中应用着. 赛德尔[①]及斯托克斯[②]于 1848 年刊出了一致收敛性与非一致收敛性的区别. 如果连续函数级数和有不连续点, 则在它近处 "级数*任意*缓慢地收敛" (赛德尔) 或 "变成*无穷地*延缓" (斯托克斯).

在此斯托克斯推想, 反过来由这种级数和的连续性可推断延缓性的不存在, 即我们所说一致收敛性的存在. 赛德尔则认为这还成问题, 后来举例指明了这反面的结论一般是不正确的, *迪尼*于 1876 年证明了这只*特别对正项级数的情形*是正确的 [**267** 段].

历史谈到这里结束. 第二十四章末尾的 "三角级数史略" 可作补充 [也可参看 **313** 段 "关于两个极限运算次序对调的史话"].

[①] Philipp Ludwig von Seidel (1821—1896) 是德国数学家.

[②] George Gabriel Stokes (1819—1903) 是英国物理学家兼数学家.

第十七章　反常积分

§1. 带无限积分限的反常积分

282. 带无限积分限的积分定义　在第十一章曾对有限区间 $[a,b]$ 及有界函数 $f(x)$ 的情形讲过定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的概念. 本章要讲这个概念在各个方向的推广. 我们先来考虑推广到无限区间内的积分.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 内, 也即对 $x \geqslant a$, 有定义, 并且在其任何有限部分 $[a,A]$ 内可积分, 如此积分 $\int_a^A f(x)dx$ 在任何 $A>a$ 之下有意义.

这个积分在 $A\to+\infty$ 时的有限或无限极限叫做函数 $f(x)$ 在区间 a 至 $+\infty$ 内的 (反常) 积分并用下面的记号表示:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx. \tag{1}$$

在这种有限极限存在时我们说积分 (1)收敛, 而函数 $f(x)$ 称为在无限区间 $[a,+\infty]$ 内可积分的. 为了与早先所讲的正常意义的积分或正常积分表示区别, 刚才下定义的积分 (1) 叫做反常积分[1].

如果极限 (1) 无限或根本不存在, 则说该积分发散.

与 (1) 相似, 函数 $f(x)$ 由 $-\infty$ 至 a 的积分可这样下定义:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A'\to-\infty}\int_{A'}^a f(x)dx \quad (A'<a), \tag{2}$$

[1] 记得我们在 **241** 段已碰到过反常积分的概念.

同样, 函数 $f(x)$ 由 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的积分可这样下定义:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A'\to-\infty\\ A\to+\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)dx. \tag{3}$$

在此对积分 (1) 所导入的术语同样适用.

在最后这个情形, 如取任意一数 a, 可令

$$\int_{A'}^{A} f(x)dx = \int_{A'}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{A} f(x)dx,$$

并且对左边的积分 $A'\to-\infty, A\to+\infty$ 时极限的存在显然就等价于对右边的积分极限 (1) 及 (2) 分别存在. 如此, 由 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的积分也可以用等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

来下定义, 假设右边的积分分别存在的话①. 这个定义事实上与点 a 的选择无关.

例 1) 函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在任何有限区间 $[0, A]$ $(A>0)$ 内可积, 而我们有

$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \arctan A.$$

因为这个积分在 $A\to+\infty$ 时有一个有限极限 $\dfrac{\pi}{2}$, 则由 0 至 $+\infty$ 此积分收敛而有值

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A = \frac{\pi}{2}.$$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A'\to-\infty}\int_{A'}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A'\to-\infty}(-\arctan A') = \frac{\pi}{2}.$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^{0} = \pi.$

283. 积分学基本公式的应用 在上面所举的例子里我们先用原函数在有限区间内算出了积分, 然后再取极限. 这两个步骤可合并成为一个公式.

例如, 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty]$ 内有定义并且连续, 如此 $f(x)$ 在此区间内有原函数 $F(x)$ [**183** 段], 而按积分学基本公式 [**185** 段] 有

$$\int_a^A f(x)dx = F(A) - F(a) = F(x)\Big|_a^A.$$

由此显然反常积分 (1) 的存在就等价于有限极限

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = F(+\infty)$$

① 只有这两个积分等于不同号无穷大的情形是例外.

的存在, 于是

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

同样

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{a},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

在此 $F(-\infty)$ 理解为 $\lim\limits_{A'\to-\infty} F(A')$. 双重替换只有在其中的极限都存在且有限时才可能, 可见这本身就已保证了该积分的存在.

现在再举几个例.

4) 我们首先来讨论这个问题: 在什么指数值 λ 之下存在反常积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \quad (a > 0)?$$

设 $\lambda \neq -1$, 于是

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda}\Big|_a^{+\infty}.$$

在 $\lambda > 1$ 时双重替换连带该积分都有一个有限的值, 在 $\lambda < 1$ 时则两式变成 $+\infty$. 在 $\lambda = 1$ 时我们有

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^{+\infty} = +\infty.$$

如此, 该积分在 $\lambda > 1$ 时收敛, 而在 $\lambda \leqslant 1$ 时发散.

5) 试看积分 $(a > 0)$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx.$$

回忆其相应原函数 [**164** 段, 4)] 立即得出

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx = -\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2} e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = \frac{b}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{b\sin bx - a\cos bx}{a^2+b^2} e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

6) 最后, 积分

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx, \quad \int_0^{+\infty} \cos x dx$$

不存在, 因为双重替换

$$-\cos x\Big|_0^{+\infty}, \quad \sin x\Big|_0^{+\infty}$$

失去意义: $\cos x$ 及 $\sin x$ 在 $x \to \infty$ 时没有极限.

284. 与级数的相似性 · 简单定理 以下我们将只限于讨论 (1) 型的积分: 所有对它们说的话全都不难搬到 (2) 与 (3) 的情形上去. 在此我们总是假设, 函数 $f(x)$ 是在任意界限 a 与 $A > a$ 之间常义可积分的, 如此问题只在由 a 至 $+\infty$ 的反常积分.

在反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 之间存在深刻的相似性, 这一点值得予以强调.

如果将依 n 的求和过程换成依 x 的积分过程, 则表现出如下的相似性:

级数通项	被积函数
a_n	$f(x)$
级数部分和	常义积分
$\sum_{n=1}^{N} a_n$	$\int_a^A f(x)dx$
级数之和	反常积分
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\int_a^{+\infty} f(x)dx$
作为部分和在 $N \to \infty$ 时的极限	作为前一积分在 $A \to +\infty$ 时的极限
级数余项	积分
$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$	$\int_A^{+\infty} f(x)dx$

我们来列举一些关于反常积分的简单定理, 它们与 **235** 段那些关于级数的定理是相似的. 其证明 (可利用上述相似性) 留给读者去做.

1°. 如果积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则积分 $\int_A^{+\infty} f(x)dx$ $(A > a)$ 也收敛, 其逆也真. 此时有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^A f(x)dx + \int_A^{+\infty} f(x)dx.$$

2°. 在积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的情形我们有

$$\lim_{A\to\infty} \int_A^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

3°. 若积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty} cf(x)dx$ (c 为常数) 也收敛, 并且

$$\int_a^{+\infty} cf(x)dx = c\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

最后:

4°. 如果积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 及 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]dx$ 也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

285. 正函数情形的积分收敛性 如果函数 $f(x)$ 是正的 (非负), 则积分

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx \tag{4}$$

为变量 A 的单调递增函数. 它在 $A \to +\infty$ 时的有限极限存在问题很容易解决 —— 根据单调函数极限定理 [**47** 段]:

要反常积分 (1)—— 在函数 $f(x)$ 是**正**的情形 —— 收敛其必要而充分的条件是要积分 (4) 在 A 增大时保持上有界:

$$\int_a^A f(x)dx \leqslant L \quad (L \text{ 为常数}).$$

如其这条件不满足, 则积分 (1) 有值 $+\infty$ [参看 **236** 段].

根据这定理可推出下面的正函数积分 "比较定理":

定理 1 如果当 $x \geqslant A$ $(A \geqslant a)$ 时成立不等式 $f(x) \leqslant g(x)$, 则由积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 的收敛性可推知积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的收敛性, 也就是由 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的发散性可推知 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 的发散性.

证明 可仿照 **237** 段定理 1.

常常会用到下面这个定理, 它是定理 1 的推论:

定理 2 如果存在极限

$$\lim_{x \to +\infty} = \frac{f(x)}{g(x)} = K \quad (0 \leqslant K \leqslant +\infty),$$

则在 $K < +\infty$ 时由积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 的收敛性可推知积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的收敛性, 而在 $K > 0$ 时由第一个积分的发散性可推知第二积分的发散性.

[如此, 在 $0 < K < +\infty$ 时两积分同时收敛或发散.]

证明 也与 **237** 段相似的定理 2 一样.

选取具体的函数作比较, 可由此得出积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛性或发散性的特殊

检验法. 有实际意义的是与函数 $\frac{1}{x^{\lambda}}$ 作比较, 后者在 $\lambda>1$ 时由 a 至 $+\infty$ 可积, 而在 $\lambda\leqslant 1$ 时则不可积 [**283** 段, 4)]. 根据它可构成下列检验法.

设对充分大的 x 函数 $f(x)$ 有这样形状:

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{x^{\lambda}}\quad(\lambda>0).$$

于是有: 1) 如果 $\lambda>1$ 并且 $\varphi(x)\leqslant c<+\infty$, 则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 2) 如果 $\lambda\leqslant 1$ 并且 $\varphi(x)\geqslant c>0$, 则积分发散.

证明要用到定理 1, 比较函数是 $\frac{c}{x^{\lambda}}$ [**284** 段, 3°].

如果在 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 是 $\lambda>0$ 阶无穷小 (与 $\frac{1}{x}$ 比较), 则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛或发散就取决于 $\lambda>1$ 或 $\leqslant 1$.

这里要引用定理 2, 函数 $g(x)$ 就是 $\frac{1}{x^{\lambda}}$.

例

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}dx,\quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

被积式在 $x\to\infty$ 时是无穷小, 各为 $\frac{1}{2}$ 阶及 2 阶. 所以, 第一个积分发散而第二个收敛.

286. 一般情形的积分收敛性 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛性问题按一般定义 (1) 反常积分无非是 A 的函数 (4) 在 $A\to\infty$ 时有限极限的存在问题. 应用波尔查诺 – 柯西定理 [**53** 段] 于这个函数上就可将反常积分收敛性条件表示为如下形式:

要反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 其必要而充分的条件是要对每个数 $\varepsilon>0$ 恒有这样一个数 $A_0>a$ 与之相应, 使在 $A>A_0$ 并且 $A'>A$ 时成立不等式

$$|\Phi(A')-\Phi(A)|=\left|\int_a^{A'}f(x)dx-\int_a^{A}f(x)dx\right|=\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

由这个准则很容易建立下列命题:

如果积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛更不待言.

事实上, 应用所讲的准则到积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 上 (这积分我们假设是收敛的), 则我们知道, 对任何 $\varepsilon>0$, 恒可找到这样的 $A_0>a$, 使

$$\int_A^{A'}|f(x)|dx<\varepsilon,$$

只要 $A' > A > A_0$. 但显然

$$\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| \leqslant \int_A^{A'} |f(x)|dx,$$

所以对同样 A, A' 更应成立不等式

$$\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| < \varepsilon,$$

由此, 按我们的准则推知积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

注意由后面的积分一般说来却并不能推出积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 的收敛性. 根据这情况我们特别区分出下面的情形. 如果积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 与积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 同时收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 称作绝对收敛的, 而函数 $f(x)$ 称作在区间 $[a, +\infty]$ 内绝对可积分的①, 非绝对收敛的例子, 将在 **287** 段给出.

由所证明的定理可以建立变号函数 $f(x)$ 的积分的收敛性, 这只要应用前段的检验法于正函数 $|f(x)|$: 如果这个函数判明可积分, 则函数 $f(x)$ 也可积分并且是绝对可积分的.

例如, 设有积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2 + x^2}dx$. 因为

$$\left|\frac{\cos ax}{k^2 + x^2}\right| \leqslant \frac{1}{k^2 + x^2},$$

而右边的函数的积分收敛, 故 [**285** 段, 定理 1] 左边的函数的积分也收敛, 从而所设积分也就 (绝对) 收敛.

显然, 这里对变号函数所讲的办法 —— 在顺利的情形下 —— 只能推出绝对收敛性来. 如果所给的函数的积分发散或收敛而不绝对收敛, 则要用对正函数所建立的检验法来判别这些情形是不行的.

287. 更精致的检验法 我们现在来讲另一类型的检验法, 它们可以确定许多非绝对收敛的反常积分的收敛性.

设我们有两个函数 $f(x)$ 及 $g(x)$, 在区间 $[a, +\infty)$ 内有定义并且连续; 对函数 $g(x)$ 我们还假设其为单调的并且有连续导函数 (显然, 不变号). 我们关心的是保证乘积的积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \tag{5}$$

收敛的条件.

① 又是与无穷级数相似 [参看 **243** 段].

我们假设

(I) 1) 积分 (4)

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx$$

是 A 的有界函数:

$$|\Phi(A)| \leqslant K \quad (K \text{ 为常数, } a \leqslant A < +\infty)$$

(不过极限 $\lim\limits_{A\to+\infty} \Phi(A)$, 即反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, 也可不存在);

2) $x \to +\infty$ 时 $g(x) \to 0$.

于是积分 (5) 收敛.

对任意的 $A' > A > a$, 我们分部积分而有:

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx = \Phi(A')g(A') - \Phi(A)g(A) - \int_A^{A'} \Phi(x)g'(x)dx;$$

如果对最后一积分应用广义中值定理 [**182** 段, 10°], 则它可表示为这样形状:

$$\int_A^{A'} \Phi(x)g'(x)dx = \Phi(\xi)\int_A^{A'} g'(x)dx = \Phi(\xi)[g(A') - g(A)] \quad (A \leqslant \xi \leqslant A'),$$

而最后有

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx = [\Phi(A') - \Phi(\xi)]g(A') + [\Phi(\xi) - \Phi(A)]g(A). \tag{6}$$

因由 1) 知两个括号绝对值不超过 $2K$, 而由 2) 可找到这样一个 A_0, 使在 $x > A_0$ 时

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4K}$$

(这里 $\varepsilon > 0$ 是预先任意取定的), 则在 $A' > A > A_0$ 时

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| < \varepsilon,$$

由此推知积分 (5) 收敛 [**286** 段].

上述条件也可换成另外一套, 对函数 f 的要求增强而对 g 所设的条件则减弱. 即现在设

(II) 1′) 存在反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \Phi(A);$$

2′) 函数 $g(x)$ 有界:

$$|g(x)| \leqslant L \quad (L \text{ 是常数; } a \leqslant x < +\infty).$$

在这些条件之下积分 (5) 也收敛.

这回在 (6) 中第二因子有界而第一因子 —— 取 A 和 A' 充分大 —— 可以使其任意小, 如此得出同样结果.

现在来看几个例.

积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda}dx, \quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda}dx$$

($a>0$ 及 $\lambda>0$ 时) 按检验法 (I) 收敛. 现在可以各取 $\sin x$ 或 $\cos x$ 作函数 $f(x)$, 因为

$$\left|\int_a^A \sin x dx\right| = |\cos a - \cos A| \leqslant 2, \quad \left|\int_a^A \cos x dx\right| \leqslant 2,$$

虽然在无限区间内这些函数并不可积分 [**283** 段, 6)]; $g(x)$ 则取 $\dfrac{1}{x^\lambda}$.

在 $\lambda>1$ 时这些积分是绝对收敛的, 因为积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$$

收敛 [**283** 段, 4)]; 而 $|\sin x|$ 和 $|\cos x| \leqslant 1$. 反之, 在 $\lambda \leqslant 1$ 时两个积分都非绝对收敛. 要证明这一点, 如对积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

来说只需确定积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

发散. 事实上, 如果这积分收敛, 则由于不等式

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x$$

积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x} dx$$

也就更不成问题是收敛的 [**285** 段, 定理 1]; 加上明显收敛的积分

$$\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx,$$

我们将得出这样的结论: 积分

$$\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

收敛, 而事实上不然 [**283** 段, 4)].

附注 现在, 当我们确定积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad 及 \quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

收敛性后, 我们终于可以把第一卷 **172** 段中所讲过的非初等函数 $\operatorname{si} x$ (“积分正弦”) 及 $\operatorname{ci} x$ (“积分余弦”) 的定义予以精确化. 即设

$$\operatorname{si} x = -\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad (x \geqslant 0), \quad \operatorname{ci} x = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \quad (x>0).$$

如果, 比如说, 把第二公式写成这样:

$$\operatorname{ci} x = \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt,$$

则按定积分的一个已知性质 [**183** 段, 12°], 显然 $\operatorname{ci} x$ 的导函数事实上等于 $\dfrac{\cos x}{x}$.

§2. 无界函数的反常积分

288. 无界函数积分定义 现在我们来考虑一个函数 $f(x)$, 给定在区间 $[a,b]$ 内而在此区间不可积分. 我们更确定地假设, 它在任一区间 $[a,b-\eta]$ $(0<\eta<b-a)$ 内可积分而在每个 b 点之左的区间 $[b-\eta,b]$ 内就不可积分了. 这时点 b 称为奇点.

可以指出, 此时在点 b 附近函数 $f(x)$ 必须是**无界**的, 而正是因此它在 b 附近不可积分. 函数 $f(x)$ 在点 b 寻常是 "成为无穷" 的 (记住这只理解为在 $x\to b$ 时函数趋于无穷).

积分 $\int_a^{b-\eta} f(x)dx$ 在 $\eta\to 0$ 时的有限或无限极限叫做函数 $f(x)$ 在 a 至 b 区间内的 (反常) 积分并表示成

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta} f(x)dx. \tag{1}$$

在这种有限极限存在的情形我们说, 积分 (1) 收敛, 而函数 $f(x)$ 称为在区间 $[a,b]$ 内可积分的. 在相反的情形就说该积分是发散的.

例 1) 函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在任一区间 $[0,1-\eta]$ $(0<\eta<1)$ 内有界并且可积分, 而

$$\int_0^{1-\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin(1-\eta).$$

在点 $x=1$ 该函数成为无穷. 显然, 点 $x=1$ 就是奇点.

因为所算出的积分在 $\eta\to 0$ 时趋于极限 $\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$, 故存在反常积分

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\eta\to 0}\int_0^{1-\eta}=\frac{\pi}{2}.$$

现在设函数 $f(x)$ 在任一区间 $[a+\eta',b]$ $(0<\eta'<b-a)$ 内有界并且可积分, 但在点 a (奇点) 右边每个区间 $[a,a+\eta']$ 内它就变成不可积分了. 于是函数 $f(x)$ 由 a 至 b 的 (反常) 积分就以下面的等式来下定义:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta'\to 0}\int_{a+\eta'}^{b} f(x)dx. \tag{2}$$

如果两点 a 和 b 都成奇点, 则 a 至 b 的积分就以下面的等式作它的定义:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}}\int_{a+\eta_1}^{b-\eta_2} f(x)dx. \tag{3}$$

定义 (3) 可换成为

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,$$

假设的是 $a<c<b$ 而右边两个反常积分存在 (此时 c 点的选择法没有关系)①.

关于反常积分 (2) 和 (3) 仍保持以前的术语.

2) $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, 奇点为 -1,

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\eta'\to 0}\int_{-1+\eta'}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\eta'\to 0}[-\arcsin(-1+\eta')]=\frac{\pi}{2}.$$

3) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, 两个奇点 -1 及 1,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}=\pi.$$

不难理解, 在具有任何 (有限) 多个奇点时反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 应如何下定义.

最后, 我们来考虑一个函数 $f(x)$, 给定在无限区间内, 比如说 $[a,+\infty]$ 内, 而在其中有有限多个奇点②, 在其附近它不再可积分. 设在每个有限区间 $[a,A]$ 内积分 $\int_a^A f(x)dx$ 存在, 它可以是正常的, 也可以是 —— 按照上面所给定义 —— 反常的. 于是, 再一次取 $A\to+\infty$ 时的极限可以用等式 (1) [**282** 段] 来下区间 $[a,+\infty]$ 内的反常积分的定义.

289. 积分学基本公式的应用 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 内有定义并且连续, 同时 b 是其奇点. 对 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 存在一原函数 $F(x)$, 而

$$\int_a^{b-\eta}f(x)dx=F(b-\eta)-F(a)=F(x)\Big|_a^{b-\eta},$$

如此反常积分 (1) 的收敛性就等价于有限极限 $\lim\limits_{\eta\to 0}F(b-\eta)$ 的存在. 如果后者存在, 则它自然可取作原函数在 $x=b$ 时的值 $F(b)$, 由此 $F(x)$ 在全区间 $[a,b]$ 内都成了连续的. 于是我们有了这寻常形式的公式来计算积分 (1):

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b. \tag{4}$$

同一公式在奇点位于区间内部或有若干个奇点时也仍成立, *但必须牢记, 这有一定的条件*: 原函数 $F(x)$ 不但要除了在奇点上外处处有 $f(x)$ 为其导数, 并且还要 *$F(x)$ 在这些奇点上仍然连续*. 这种原函数的存在就保证了反常积分的收敛性. 如果原函数在区间端点上或内部成为无穷, 则该积分发散.

现在来看几个例子.

---

① 只有这两个积分等于不同号无穷大的情形是例外.

② 奇点可以无穷多, 但在每个有限区间 $[a,A]$ $(A>a)$ 内只有有限多个 (可以随 A 增至无穷).

4) 我们来讨论在什么指数值 $\lambda > 0$ 之下反常积分

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} \quad (b > a)$$

收敛.

设 $\lambda \neq 1$, 我们有

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}(x-a)^{1-\lambda}\Big|_a^b,$$

如此该积分在 $\lambda < 1$ 时收敛而在 $\lambda > 1$ 时发散: 原函数在端点 $x = a$ 上成为无穷. 按同样理由该积分在 $\lambda = 1$ 时也发散:

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \ln(x-a)\Big|_a^b.$$

5) 同样的结果可以对这个积分建立:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} \quad (b > a, \lambda > 0),$$

它与前例无本质差异.

6) 对积分 $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$; 奇点为 $x = 0$. 我们有

$$\int_0^1 \ln x dx = (x\ln x - x)\Big|_0^1 = -1,$$

因为在 $x \to 0$ 原函数有极限值 0.

290. 积分收敛性条件及检验法 我们只详论与定义 (1) 有关的情形, 因其他情形可仿照而无困难. 由于它与无限区间 $[a, +\infty]$ 的反常积分完全相似, 我们不再列举其简单定理 [参看 **284** 段], 而只陈述一些关于积分存在问题的基本命题 —— 其证明则与上面的相似. 在所有的情形, 都假定所考虑的函数在任一区间 $[a, b-\eta](\eta > 0)$ 内依正常的意义可积分, 而 $x = b$ 是唯一奇点.

如 **285** 段一样:

要反常积分 (1) 在函数 $f(x)$ 为正的情形收敛, 其必要而充分的条件是要积分 $\displaystyle\int_a^{b-\eta} f(x)dx$ $(\eta > 0)$ 保持上有界:

$$\int_a^{b-\eta} f(x)dx \leqslant L \quad (L \text{ 为常数}).$$

如果这个条件不成立, 则积分 (1) 有值 $+\infty$.

285 段关于正函数的几个比较定理在此也成立. 我们不再重述, 但陈述建立在它们上面的检验法.

设对充分接近于 b 的 x 值函数 $f(x)$ 有这样的形状:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

于是: 1) 如果 $\lambda < 1$ 并且 $\varphi(x) \leqslant c < \infty$, 则积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛. 2) 如果 $\lambda \geqslant 1$ 而 $\varphi(x) \geqslant c > 0$, 则此积分发散.

便于实用的较为特殊的形式是:

如果 $x \to b$ 时函数 $f(x)$ 是 $\lambda > 0$ 阶无穷大 $\left(与\ \dfrac{1}{b-x}\ 比较\right)$, 则积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛或发散依 $\lambda < 1$ 或 $\lambda \geqslant 1$ 而定.

例 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$.

被积函数在 $x \to 1$ 时成为 $\dfrac{1}{4}$ 阶无穷大:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} : \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}} \to \frac{1}{\sqrt[4]{4}}, \quad 若\ x \to 1.$$

所以该积分收敛.

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^p dx \quad (p \neq 0)$.

若 $p > 0$, 则奇点为 $\dfrac{\pi}{2}$, 而 $p < 0$ 时奇点为 0. 在两种情形被积式都是 $|p|$ 阶无穷大. 如此, 在 $|p| < 1$ 时收敛而在 $|p| > 1$ 时发散.

3) $\displaystyle\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$.

$a < 1$ 时奇点为 0, $b < 1$ 时奇点为 1. 将该积分分解为二, 比如说: $\int_0^1 = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1$. 因为被积函数在 $x \to 0$ 时为 $1-a$ 阶无穷大 (若 $a < 1$), 则第一积分只在 $1-a < 1$, 也即 $a > 0$ 这条件下存在; 同样第二积分在 $b > 0$ 时存在. 如此, 该积分在而且只在 $a > 0$ 并且 $b > 0$ 时收敛.

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$.

奇点为 $+\infty$ 及 0 ($p < 1$ 时). $\int_0^1$ 只在 $p > 0$ 时 (与 $\dfrac{1}{x}$ 比较成 $1-p$ 阶无穷大时) 存在. $\int_1^{+\infty}$ 则对任何 p 都存在, 因取 $\lambda > 1$ 我们有

$$\frac{x^{p-1}e^{-x}}{\dfrac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{\lambda+p-1}}{e^x} \to 0, \quad 若 \quad x \to \infty;$$

$\int_0^{+\infty}$ 在 $p > 0$ 时存在.

附注 我们在第一卷 **172** 段讲到过非初等函数 $\operatorname{li} y = \displaystyle\int \frac{dy}{\ln y}$ (“积分对数”). 为了确定积分中所含任意常数设

$$\operatorname{li} y = \int_0^y \frac{dt}{\ln t}.$$

在 $y < 1$ 时这个积分存在而成正常积分. 但在 $y > 1$ 时该积分失去意义 —— 即使作为反常积分

来看, 因为在 $t=1$ 时被积函数是一阶的无穷大 (与 $\frac{1}{t-1}$ 比较). 在这情形上面所说的积分理解为极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{1-\varepsilon}+\int_{1+\varepsilon}^{y}\right\}\frac{dt}{\ln t}.$$

这极限的存在性证明不讲了.

在变号函数的情形应用波尔查诺 – 柯西检验法我们有这样一般的收敛性条件:

要反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ (b 为奇点) 收敛, 其必要而充分的条件是要对每一个数 $\varepsilon>0$ 恒有这样一个数 $\delta>0$ 相应使 $0<\eta<\delta$ 及 $0<\eta'<\delta$ 时成立不等式

$$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

也如上面一样, 由此推出:

如果积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛, 则积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛更不待言.

逆命题一般不真. 所以这里特别分出积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 与积分 $\int_a^b f(x)dx$ 同时收敛的情形; 此时第一个积分称作*绝对收敛的*, 而函数 $f(x)$ 称作在区间 $[a,b]$ 内*绝对可积的*.

§3. 反常积分的变换及计算

291. 反常积分的分部积分法 设函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 连同其一阶导函数在全区间 $[a,b]$ 内有定义并且连续, 只除去点 b (它也可等于 $+\infty$). 于是成立等式

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu,$$

这里双重替换理解为差式

$$\lim_{x\to b}u(x)\cdot v(x)-u(a)\cdot v(a).$$

在此假设等式的三个式子 (两个积分及一个双重替换中) 有两个是有有限值的: 第三个就可由此推知也是如此.

事实上, 取 $a<x_0<b$ 而写出对区间 $[a,x_0]$ 的寻常分部积分公式, 其中所有积分都是常义的:

$$\int_a^{x_0} udv=[u(x_0)\cdot v(x_0)-u(a)\cdot v(a)]-\int_a^{x_0} vdu.$$

现在设在此等式中 x_0 趋于 b. 按所设条件其中有两式在 $x_0 \to b$ 时有有限极限①. 所以, 第三式也有有限极限, 而所要证明的等式可由取极限而证实.

例

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = x \cdot \ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}dx$$

—— 这里由分部积分可将反常积分化为正常积分, 而由此证明反常积分的存在.

292. 反常积分中的变量替换 设函数 $f(x)$ 在有限或无限区间 $[a,b)$ 内有定义而且连续, 因此, 在其每个不包含点 b (它也可以是 $+\infty$) 的部分中是依正常意义可积分的; 这个点 b 假设是函数 $f(x)$ 的唯一奇点.

现在我们来考虑一个单调增函数 $\varphi(t)$, 它连同其导函数 $\varphi'(t)$ 都在区间 $[\alpha,\beta)$ 内连续, 而 β 可以是 $+\infty$, 并设 $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. 最后一等式应理解为 $\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=b$.

在这些条件之下成立等式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt, \tag{1}$$

但要假设这些积分中有一个是收敛的 (另一个的收敛可由此推出). 第二积分可以是正常的, 也可以是反常的而有唯一奇点 β.

按反函数定理 [**71** 段], 显然 t 可看作一个在区间 $[a,b]$ 内单调递增而且连续的 x 的函数: $t=\theta(x)$, 而 $\lim\limits_{x\to b}\theta(x)=\beta$.

现在设 x_0 和 t_0 为 x 和 t 于区间 (a,b) 及 (α,β) 内任意一对互相对应的值. 于是借助正常积分中的变量替换我们将有

$$\int_a^{x_0} f(x)dx = \int_\alpha^{t_0} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

如果比如说 (1) 中第二个积分收敛, 则令 x_0 依任意方式逼近于 b; 此时 $t_0=\theta(x_0)$ 趋近于 β, 而我们就建立了公式 (1), 同时也证明了左边的积分收敛.

我们的论证同时也可应用于单调递减函数的情形② —— 此时 $\alpha>\beta$. 至于奇点的其他可能分布情形也都可以完全类似地处理. 在确定变换后的积分限时必须记住, 下限 α 要相应于下限 a, 上限 β 相应于上限 b, 不论是 $\alpha<\beta$ 还是 $\alpha>\beta$ 的情形.

例 1) 计算积分

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

---

①当诸积分 $\int_a^b$ 中有某一成正常积分的情形这也还是真的 [**183** 段, 11°].

②在反常积分的情形当 $\alpha>\beta$ 时我们也设

$$\int_\alpha^\beta = -\int_\beta^\alpha$$

采用替换

$$x = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi.$$

这里 $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$, 而所求积分化为常义积分

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi.$$

2) 要确定积分 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ 的收敛性我们在其中作变量替换: $x = \sqrt{t}, dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}, a = \alpha = 0, b = \beta = +\infty$. 如此得出明显收敛的积分 [**287** 段] $\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$, 所以所求积分也收敛. 值得注意的是, 其中被积函数在 $x \to +\infty$ 时不趋于任何极限而振动于 -1 与 $+1$ 之间.

同样可解决积分 $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ 的收敛性问题.

3) 积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

的计算可应用适当替换而大为简化.

首先, 采用替换 $x = \frac{1}{t}(a = 0, b = +\infty, \alpha = \infty, \beta = 0)$, 可将积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$$

化成所求积分, 如此可写

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}.$$

如果现在采用替换 $x - \frac{1}{x} = z(a = 0, b = +\infty, \alpha = -\infty, \beta = \infty)$, 则立即得出

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{z}{\sqrt{2}}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

293. 积分的技巧计算法 我们应用技巧的方法来计算一些重要的反常积分. 在此相应的原函数不能表示为有限的形式, 而不能利用. 所有这些积分 18 世纪的数学家都已知道 (特别是欧拉), 只是没有严密的推证.

1°. 设要计算积分

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx,$$

其存在我们已经知道 [**291** 段].

这一计算要用变量替换, 设 $x = 2t$ 我们有:

$$J = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2t dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt.$$

在最后一积分中令 $t = \frac{\pi}{2} - u$, 而将其化为 $2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin u du$ 的形式, 如此, 最后我们得出方程式

$$J = \frac{\pi}{2} \cdot \ln 2 + 2J, \quad 即 \quad J = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

来决定 J.

2°. 现在来计算

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

这个在概率论中常见的积分①. 为此我们预先来证明几个不等式.

用微分学中的寻常方法不难确定, 函数 $(1+t)e^{-t}$, 在 $t = 0$ 取得其最大值 1. 所以对 $t \neq 0$ 有

$$(1+t)e^{-t} < 1.$$

在此设 $t = \pm x^2$, 我们得

$$(1-x^2)e^{x^2} < 1 \quad 和 \quad (1+x^2)e^{-x^2} < 1,$$

由此有

$$1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}.$$

在第一不等式中令 x 的变化限于区间 $(0,1)$ 内 (如此 $1 - x^2 > 0$), 在第二不等式中将 $x > 0$ 看作任意的, 而将所有诸式取 n 次方 (n 为任意正整数); 如此得②

$$\underset{(0<x<1)}{(1-x^2)^n < e^{-nx^2}} \quad 及 \quad \underset{(x>0)}{e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n}}.$$

在由 0 至 1 的区间内积分第一不等式, 由 0 至 $+\infty$ 积分第二不等式, 如此得

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

但

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot K \quad (用替换\ u = \sqrt{n} \cdot x),$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{2n!!}{(2n+1)!!} \quad (用替换\ x = \cos t),$$

而最后,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} t dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (用替换\ x = \cot t).$$

我们在此利用 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$ [**187** 段, (5)] 的已知式子. 如此, 所求 K 值可以包含在下列二式之间:

$$\sqrt{n} \cdot \frac{2n!!}{(2n+1)!!} < K < \sqrt{n} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

①这个积分的存在是不成问题的, 因为 ($x > 1$ 时) $e^{-x^2} < e^{-x}$, 而 e^{-x} 的积分可立即算出.

②对正项不等式两边取正整数次方幂是容许的.

如此, 平方起来变成:

$$\frac{n}{2n+1}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}<K^2<\frac{n}{2n-1}\cdot\left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right]^2(2n-1)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

由沃利斯公式 [**188** 段] 有:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

现在不难看出, 两端的式子在 $n\to\infty$ 时趋于同一极限 $\frac{\pi}{4}$, 所以

$$K^2=\frac{\pi}{4}\quad 而\quad K=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\quad (因\ K>0).$$

3°. 最后我们来看积分

$$L=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx,$$

其收敛性是已知的 [**287** 段]. 如果这个反常积分

$$L=\lim_{A\to\infty}\int_0^A\frac{\sin x}{x}dx$$

的定义用 "序列的语言" 表出 [**32** 段], 则可特别令

$$L=\lim_{A\to\infty}\int_0^{n\cdot\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx.$$

另一方面, 求序列的极限可代之以求 [**234** 段] 下面的无穷级数的和:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\left\{\int_0^{\pi}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\right\}+\left\{\int_0^{\frac{3\pi}{2}}-\int_0^{\pi}\right\}+\cdots=\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}+\cdots,$$

如此最后得

$$L=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{\nu\cdot\frac{\pi}{2}}^{(\nu+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx.$$

令 $\nu=2\mu$ 或 $2\mu-1$ 并相应地采用替换 $x=\mu\pi+t$ 或 $x=\mu\pi-t$, 我们有

$$\int_{2\mu\cdot\frac{\pi}{2}}^{(2\mu+1)\frac{\pi}{2}}=(-1)^{\mu}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\mu\pi+t}dt$$

及

$$\int_{(2\mu-1)\frac{\pi}{2}}^{2\mu\cdot\frac{\pi}{2}}=(-1)^{\mu-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\mu\pi-t}dt.$$

由此得

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt+\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right)\sin t dt.$$

因为级数

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right)$$

在区间 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ 内一致收敛, 或被收敛级数 $\frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2-\frac{1}{4}}$ 所控制, 则它所有各项均乘以有界函数 $\sin t$ 后可逐项积分. 如此我们可以将 L 的表达式写成这样形状:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \left[\frac{1}{t} + \sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi} + \frac{1}{t-\mu\pi}\right)\right] dt.$$

我们以后将知道 [**406** 段, 3), 附注], 括号中的式子等于 $\frac{1}{\sin t}$, 并且就是这个函数的所谓 "简单分式分解式". 此事实目前不加证明而应用于所求积分. 终于得出

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

这种精彩的推导法出于罗巴切夫斯基, 他最先注意到这个重要积分的旧算法不严密.

事实上罗巴切夫斯基用他的方法还得出了这个更一般的公式:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx,$$

在此假设 $f(x+\pi) = f(x)$ 且 $f(\pi - x) = f(x)$; 在所考虑的情形 $f(x) = 1$.

附注 由所得结果可知

$$L(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t}dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a > 0 \text{ 时}, \\ 0, & a = 0 \text{ 时}, \\ -\frac{\pi}{2}, & a < 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

在 $a > 0$ 时这个积分可由简单替换 $x = at$ 得到 L; a 变号时积分也跟着变号, 而在 $a = 0$ 时该积分显然等于 0.

这个属于傅里叶的简单附注给了其同时代人深刻的印象: a 的一个函数, 在此变量不同值之下有不同的表示法, 都同时又能有一个统一的 "分析表达式"! [参看 **18** 段, 3° 及下面 **422** 段和 **423** 段.]

第十八章　带参变量的积分

§1. 基本理论

294. 问题的提出　我们来考虑一个二元函数 $f(x,y)$, 它对某一有限或无限区间 $[a,b]$ 内的所有 x 值及一集合 $\mathscr{Y}=\{y\}$ 内的所有 y 值都有定义. 设对 $\mathscr{Y}$ 内的每个固定 y 值函数 $f(x,y)$ 都在区间 $[a,b]$ 内常义可积或反常可积. 于是积分

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx \tag{1}$$

显然是辅助变量或参变量 y 的函数.

在 **269** 段我们曾说到函数序列 $\{f_n(x)\}$ 而考虑了积分

$$I_n=\int_a^b f_n(x)dx,$$

它们是积分 (1) 的特例: 这里正整数下标 n 就起参变量的作用.

关于函数 $I(y)$ 自然发生一系列问题 —— 关于在取极限时极限的存在及表达式, 特别是, 关于其对 y 的连续性, 关于其可微分性及其导数的表达式, 以及关于其积分等. 这些问题就是本章所要讲的.

带参变量的积分 (1) 所表示的函数性质的研究可以有独特的趣味 [关于这一点例如参看 §4]. 但此外这些性质读者可以看出也有许多应用, 特别是, 应用于反常积分计算问题.

295. 一致趋于极限函数　这标题所指出的概念在下面的研究中占很重要的地位. 设在一般情形函数 $f(x,y)$ 于二维集合 $\mathscr{M}=\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ 内有定义, 这里 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 分别表示变量 x 和 y 可取的值的集合, 而 $\mathscr{Y}$ 有一个聚点, 比如说, 有限数 y_0.

如果: 1) 对函数 $f(x,y)$ 在 $y \to y_0$ 时存在一个有限的极限函数

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x) \quad (x \text{ 属于 } \mathscr{X}) \tag{2}$$

并且 2) 对任一数 $\varepsilon>0$ 可以找到这样一个与 x **无关**的数 $\delta>0$, 使**对** $\mathscr{X}$ 内**所有** x **值**

$$\text{在 } |y-y_0|<\delta \text{ 时恒有 } |f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon, \tag{3}$$

则称函数 $f(x,y)$ 对区域 $\mathscr{X}$ 中的 x **一致地**趋于极限函数 $\varphi(x)$.

不难将这个定义改写成 y_0 为非正常数如 $+\infty$ 时的情形: 在此只要把 $|y-y_0|<\delta$ 这样的不等式换成 $y_0>\Delta$ 这样的不等式. 在第十六章 [**264** 段] 我们已搞过这种一致趋于极限函数的特例; 那里是对函数 $f_n(x)$ 而言的, 其参变量是正整数下标 n.

在 **265** 段讲函数序列时我们证明过, 一致收敛的充要条件是收敛性原理的所谓 "一致实现". 对一般情形也可以这样做. 即, 如果假设 y_0 有限的话:

1°. 要函数 $f(x,y)$ 在 $y\to y_0$ 时有极限函数并对区域 $\mathscr{X}$ 内的 x 一致趋于它, 则其必要而充分的条件是要对每一数 $\varepsilon>0$ 恒存这样一个与 x 无关的数 $\delta>0$, 使对 $\mathscr{X}$ 内一切 x 值恒成立不等式

$$|f(x,y')-f(x,y)|<\varepsilon, \tag{4}$$

只要

$$|y-y_0|<\delta, \quad |y'-y_0|<\delta \quad (y, y' \text{ 属于 } \mathscr{Y}). \tag{5}$$

[在 $y_0=+\infty$ 的情形将最后二不等式换作 $y>\Delta$, $y'>\Delta$.]

必要性 设一致收敛实现. 在定义中以 $\frac{\varepsilon}{2}$ 代 ε 并选取相应 δ 后我们由 $\mathscr{Y}$ 内取两个值 y 及 y', 使满足条件 (5). 于是不论 x 如何我们将有

$$|f(x,y')-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{及} \quad |\varphi(x)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

由此就得到 (4) 式.

充分性 如果上述条件实现, 则首先函数 (2) 显然存在. 然后在不等式 (4) 取 $y'\to y_0$ 时的极限 (这里 y 固定而且满足 $|y-y_0|<\delta$), 而得

$$|\varphi(x)-f(x,y)|\leqslant\varepsilon.$$

这就证明了函数 $f(x,y)$ 一致趋于极限函数 $\varphi(x)$.

现在设集合 $\mathscr{X}$ 是一个有限区间 $[a,b]$. 按 **266** 段定理 1*, 如果连续函数序列 $\{f_n(x)\}$一致收敛于一个极限函数, 则此函数必须是连续的; 这话也可搬到一般情形上来:

2°. 如果函数 $f(x,y)$ 在 y 取 $\mathscr{Y}$ 内任何值时对区间 $\mathscr{X}=[a,b]$ 内的 x 值而言都是连续的并且在 $y\to y_0$ 时一致趋于一个极限函数 $\varphi(x)$, 则此函数也连续.

事实上, 只要由 $\mathscr{Y}$ 内任取一个有极限 y_0 的序列 $\{y_n\}$ 使相应函数序列 $\{f(x, y_n)\}$ 一致收敛于 $\varphi(x)$: 例如, 在 y_0 有限时, 不等式

$$|f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

将对 $\mathscr{X}$ 内所有 x 值都成立, 只要 n 充分大而使 $|y_n - y_0| < \delta$ [参看 (3)], 剩下只要引证所说的定理就行了.

也不难推广迪尼定理 [**267** 段, 定理 2*]; 这次我们假设所有 $y < y_0$.

3°. 设函数 $f(x, y)$ 在 y 取 $\mathscr{Y}$ 内任何值时都对区间 $\mathscr{X} = [a, b]$ 内的 x 值连续并且在 y 增大时**单调递增**而趋于一个极限函数 $\varphi(x)$. 于是对区间 $\mathscr{X}$ 内的 x 而言它也必定**一致**趋于该极限.

证明时我们由 $\mathscr{Y}$ 内分出一个单调递增的 y 值序列 $\{y_n\}$, 趋于极限 y_0, 并且考虑相应的函数序列 $\{f(x, y_n)\}$, 它显然也是随 n 而单调递增的.

迪尼定理可以肯定这个序列对区间 $\mathscr{X}$ 内的 x 而言一致收敛于 $\varphi(x)$. 所以给定任一 $\varepsilon > 0$ 时恒可找到这样一个序号 n_0, 使不等式

$$|\varphi(x) - f(x, y_{n_0})| < \varepsilon$$

对 $\mathscr{X}$ 内所有 x 值都成立. 由于函数 f 随 y 而单调递增, 故只要 $y > y_{n_0}$ 不等式

$$|\varphi(x) - f(x, y)| < \varepsilon$$

也就成立; 如此证明了我们的断言.

虽然所建立这个一致逼近的特殊检验法看来是狭窄的, 但它往往很有用处, 因为可以不必再用别的方式来证实一致逼近了.

296. 积分号下取极限 现在来看带参变量 y 的积分 (1), 并首先限于有限区间 $[a, b]$ 及连续函数的情形.

设参变量 y 的变域 $\mathscr{Y}$ 有一聚点 y_0, 我们来讨论函数 (1) 在 $y \to y_0$ 时的极限问题.

定理 1 如果函数 $f(x, y)$ 在 y 值固定时对 $[a, b]$ 内的 x 值连续而在 $y \to y_0$ 时对 x 一致地趋于一个极限函数 (2), 则有等式

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx. \tag{6}$$

证明 [1] 极限函数 $\varphi(x)$ 已知为连续的 [**295** 段, 2°]. 指定任意一数 $\varepsilon > 0$, 我们来找这样一个数 $\delta > 0$, 使 (3) 式成立. 于是在 $|y - y_0| < \delta$ 时将有

$$\left|\int_a^b f(x, y)dx - \int_a^b \varphi(x)dx\right| = \left|\int_a^b [f(x, y) - \varphi(x)]dx\right|$$
$$\leqslant \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)|dx < \varepsilon(b - a),$$

[1] 为确定起见假设 y_0 有限.

这就证明了公式 (6).

公式 (6) 也可写成这样形状:

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx.$$

在这情形我们说, 关于参变量取极限容许"在积分号下"进行.

设所有 $y<y_0$ 则根据推广迪尼定理有 [**295** 段, 3°]:

推论 如果函数 $f(x,y)$ 在 y 固定时对 $[a,b]$ 内的 x 值为连续的而在 y 增大时趋于一个**单调递增**的连续函数, 则公式 (6) 正确.

最后我们在 $\mathscr{Y}$ 本身为一有限区间 $[c,d]$ 的假设之下来考虑函数 (1) 的连续性问题.

定理 2 如果二元函数 $f(x,y)$ 在矩形 $[a,b;c,d]$ 内有定义并且连续, 则积分 (1) 在区间 $[c,d]$ 内为参变量 y 的连续函数.

证明 既然函数 $f(x,y)$ 是一致连续的 [**137** 段], 则对任意一 $\varepsilon>0$ 必可找到这样一个 $\delta>0$, 使由不等式

$$|x''-x'|<\delta,\quad |y''-y'|<\delta$$

就可推出不等式

$$|f(x'',y'')-f(x',y')|<\varepsilon.$$

我们特别取 $x'=x''=x, y'=y_0, y''=y$; 于是在 $|y-y_0|<\delta$ 时不论 x 如何将有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon.$$

如此, 函数 $f(x,y)$ 在 y 趋于任一特殊值 y_0 时对 x 而言一致地趋于 $f(x,y_0)$, 在这种情形按定理 1 有

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b f(x,y_0)dx$$

或

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=I(y_0),$$

这就证明了我们的断言.

297. 积分号下的微分法 在研究由含参变量 y 的积分所给出的函数 (1) 的性质时该函数对参变量的导数问题具有重要意义.

在一定的假设之下计算导数 $I'(y)$ 可用公式

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx \tag{7}$$

或用柯西的更鲜明的表示法

$$D_y \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b D_y f(x,y)dx.$$

如果对 y 的导数号与对 x 的积分号可以这样对调, 则称函数 (1) 可 "在积分号下" 对参变量微分.

1697 年莱布尼茨最初将类似这样的方法函告约翰 · 伯努利, 后者为之欣喜若狂. 上面那个计算导数的公式也就称为 "莱布尼茨法则".

下面的定理建立这个法则适用的简单充分条件.

定理 3 设在矩形 $[a,b;c,d]$ 内有定义的函数 $f(x,y)$ 在任何 $[c,d]$ 内 y 的固定值之下对 $[a,b]$ 内的 x 而言连续. 更设在全区域内偏导数 $f'_y(x,y)$ 存在, 并且是一个二元的连续函数①. 于是在 $[c,d]$ 内任何 y 值之下公式 (7) 都成立.

函数 $f(x,y)$ 对 x 的连续性保证了积分 (1) 的存在. 指定任一值 $y=y_0$ 而给以增量 $\Delta y = k$, 于是

$$I(y_0) = \int_a^b f(x,y_0)dx, \quad I(y_0+k) = \int_a^b f(x,y_0+k)dx,$$

如此

$$\frac{I(y_0+k)-I(y_0)}{k} = \int_a^b \frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}dx. \tag{8}$$

右边的积分依赖于参变量 k. 我们要来证明当 $k \to 0$ 时这里容许积分号下取极限. 由此也就可证明导数

$$I'(y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{I(y_0+k)-I(y_0)}{k}$$

存在并且所要求的这个等式成立:

$$\begin{aligned} I'(y_0) &= \lim_{k\to 0} \int_a^b \frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}dx \\ &= \int_a^b \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}dx \\ &= \int_a^b f'_y(x,y_0)dx. \end{aligned}$$

为此我们先按拉格朗日公式写

$$\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k} = f'_y(x,y_0+\theta k) \quad (0<\theta<1). \tag{9}$$

利用函数 $f'_y(x,y)$ 的一致连续性, 对任一 $\varepsilon>0$ 可找到这样一个 $\delta>0$ 使在

$$|x''-x'|<\delta \quad \text{及} \quad |y''-y'|<\delta$$

①其实由这些条件已可推知函数 $f(x,y)$ 的连续性, 但我们不利用这一点.

时成立不等式

$$|f'_y(x'',y'')-f'_y(x',y')|<\varepsilon.$$

这里令 $x'=x''=x, y'=y_0, y''=y_0+\theta k$ 并且认为 $|k|<\delta$, 如此由 (9) 得出对所有 x 有

$$\left|\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}-f'_y(x,y_0)\right|<\varepsilon.$$

由此明白, 被积函数 (9) 在 $k\to 0$ 时对 x 而言一致趋于极限函数 $f'_y(x,y_0)$. 由此按定理 1 证实了可在积分号下取极限.

298. 积分号下的积分法 最后我们提出关于函数 (1) 依 y 的积分问题, 比如说, 是在区间 $[c,d]$ 内的积分.

我们特别感兴趣的是当这个积分可用公式

$$\int_c^d I(y)dy=\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy=\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx$$

表出时的情形, 它通常可不用括号而写成这样:

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy. \tag{10}$$

在这情形我们说函数 (1) 可对参变量 y 在 "(对变量 x 的) **积分号下**" 积分.

关于两个累次积分的相等下列定理给出其最简单的充分条件:

定理 4 如果函数 $f(x,y)$ 在矩形 $[a,b;c,d]$ 内对两个变量连续, 则公式 (10) 成立.

我们来证明一个较一般的等式

$$\int_c^\eta dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^\eta f(x,y)dy, \tag{10a}$$

这里 $c\leqslant\eta\leqslant d$.

在等式两边我们有参变量 η 的两个函数, 算出其对 η 的导数.

左边外层的积分有被积函数 (1), 它按定理 2 是对 y 连续的, 所以它对变上限的导数等于被积函数在 $y=\eta$ 时的值, 也即等于积分

$$I(\eta)=\int_a^b f(x,\eta)dx.$$

在 (10a) 式右边有积分

$$\int_a^b\varphi(x,\eta)dx,\quad 而\quad \varphi(x,\eta)=\int_c^\eta f(x,y)dy.$$

函数 $\varphi(x,\eta)$ 满足定理 3 的条件. 事实上, 按定理 2[①] $\varphi(x,\eta)$ 对 x 而言是连续的. 然后, 导函数

$$\varphi'_\eta(x,\eta)=f(x,\eta)$$

是两个变量的连续函数. 所以在上面所说的积分上可应用莱布尼茨法则:

$$D_\eta\int_a^b \varphi(x,\eta)dx=\int_a^b \varphi'_\eta(x,\eta)dx=\int_a^b f(x,\eta)dx=I(\eta).$$

如此, 等式 (10a) 两边作为 η 的函数有相等的导函数, 所以只能相差一个常数. 但在 $\eta=c$ 时上面所说两式显然变成 0; 所以, 它们在所有 η 值上恒等而等式 (10a) 得证.

由此特别在 $\eta=d$ 时我们可得出等式 (10).

附注 这个等式于 1769 年首先由欧拉所指出 (次年发表). 但他只以实例说明, "因为它的根据由微分及积分的本性看来是完全明显的".

299. 积分限带参变量的情形 我们来考虑一个比较复杂的情形, 此时不但被积函数含有参变量, 连积分限也带参变量. 在这情形积分有这样的形式:

$$I(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx. \tag{11}$$

我们只讨论这类积分对参变量的连续性及可微分性问题.

定理 5 *设函数 $f(x,y)$ 在矩形 $[a,b;c,d]$ 内有定义并且连续, 而曲线*

$$x=\alpha(y),\quad x=\beta(y)\quad (c\leqslant y\leqslant d)$$

连续并且不越出矩形的界限. 于是积分 (11) 是 $[c,d]$ 内 y 的连续函数.

如果 y_0 是 y 的任意一个特殊值, 则积分 (11) 可以写成这样形状:

$$I(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx+\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx-\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx. \tag{12}$$

第一个积分 —— 其中积分限已为常量 —— 在 $y\to y_0$ 时趋于

$$I(y_0)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)dx$$

(按定理 2). 剩下两个积分可作如下估计:

$$\left|\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right|\leqslant M\cdot|\beta(y)-\beta(y_0)|,$$
$$\left|\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx\right|\leqslant M\cdot|\alpha(y)-\alpha(y_0)|,$$

[①] 这里 x 是参变量.

其中 $M = \max|f(x,y)|$, 因而 —— 由函数 $\alpha(y)$ 及 $\beta(y)$ 的连续性 —— 它们在 $y \to y_0$ 时趋于 0.

如此, 终于有

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = I(y_0),$$

这就证明了本定理.

定理 6 如果上面所说的函数 $f(x,y)$, 在矩形 $[a,b;c,d]$ 内有连续导函数 $f'_y(x,y)$ 并且导数 $\alpha'(y), \beta'(y)$ 也存在, 则积分 (11) 对参变量有导数, 它可由下面的公式表出:

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + \beta'(y) \cdot f(\beta(y),y) - \alpha'(y) \cdot f(\alpha(y),y). \tag{13}$$

这里我们就由等式 (12) 出发. 第一个积分在 $y = y_0$ 有导数, 它是某一个导数的积分:

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0)dx$$

(定理 3). 对第二积分 (在 $y = y_0$ 时其值为 0) 我们按中值定理有:

$$\frac{1}{y-y_0}\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx = \frac{\beta(y)-\beta(y_0)}{y-y_0} \cdot f(\overline{x},y),$$

而 $\overline{x}$ 在 $\beta(y_0)$ 与 $\beta(y)$ 之间. 由此知第二积分在 $y = y_0$ 时的导数是

$$\beta'(y_0) \cdot f(\beta(y_0),y_0).$$

它就是前式在 $y \to y_0$ 时的极限. 同样得出第三积分在 $y = y_0$ 时的导数

$$-\alpha'(y_0) \cdot f(\alpha(y_0),y_0).$$

结合所有这些结果就证明了导数 $I'(y_0)$ 存在并得出上面那个公式.

附注 这两个定理当函数 $f(x,y)$ 只给定在曲线

$$x = \alpha(y) \quad 与 \quad x = \beta(y)$$

之间的区域内 (并具有上述性质) 时也仍成立. 但为推论简单起见, 利用了在这区域外考虑该函数的可能性.

以这样的观点来看看所建立的各个结果是有益处的: 积分 $I(y)$ 可由

$$I(y,u,v) = \int_u^v f(x,y)dx$$

这个含有三个参变量 y,u,v 的积分经过替换 $u = \alpha(y), v = \beta(y)$ 得出. 这个问题只要应用复合函数连续性及可微分性的一般定理即可完全解决. 特别是公式 (13) 可按古典格式写出:

$$\frac{dI}{dy} = \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial u} \cdot \alpha'(y) + \frac{\partial I}{\partial v} \cdot \beta'(y).$$

300. 例 1) 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (0 < a \leqslant b).$$

将被积式表示为积分的形式:

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$$

并按定理 4 在累次积分

$$I = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy$$

中对调依 x 与依 y 的积分立即得出结果

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

2) 如果把积分 I (在 a 固定时) 看作参变量 b ($b \geqslant a$) 的函数则也可给予这一计算以另外形式. 按定理 3:

$$\frac{dI}{db} = \int_0^1 x^b dx = \frac{1}{b+1}.$$

所以

$$I = \ln(b+1) + C.$$

但在 $b = a$ 时积分 I 显然等于 0, 因为 $C = -\ln(a+1)$. 代入即得和上面一样的结果.

3) 在所考虑诸情形定理 3 或 4 的条件显然都实现. 如果违背了这些条件, 则该定理的结论可能不正确. 我们来举一个这样的例子.

设在矩形 $[0,1;0,1]$ 内 $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$. 于是

$$\int_0^1 f(x,y)dx = \frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2} \quad (y > 0),$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = \arctan y\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

同时

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = -\frac{\pi}{4}.$$

注意在点 $(0,0)$ 函数 $f(x,y)$ 不连续.

§2. 积分的一致收敛性

301. 积分一致收敛性定义 在上述含参变量积分理论推广到反常积分情形时积分一致收敛性概念占特别重要的地位, 我们现在预先阐明这个概念.

设函数 $f(x,y)$ 对所有 $x \geqslant a$ 及某区域 $\mathscr{Y}$ 内所有 y 值有定义. 更设对此区域内每个 y 值存在积分

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx. \tag{1}$$

按无限限反常积分定义 [**282** 段]:

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x,y)dx.$$

如此, 积分

$$F(A,y) = \int_a^A f(x,y)dx \tag{2}$$

成为 A 与 y 的函数而在 y 固定, 并且 $A\to\infty$ 时有极限 $I(y)$. *如果这个积分对区域 $\mathscr{Y}$ 内的 y* **一致**趋于 $I(y)$, *则称积分 $I(y)$ 对参变量 y 在 $\mathscr{Y}$ 内是***一致收敛**的.

这就是说, 对任一 $\varepsilon > 0$ 恒可找这样一个与 y *无关的数* $A_0 \geqslant a$, 使得只要 $A > A_0$ 时不等式

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^A f(x,y)dx\right| = \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

*就同时对 $\mathscr{Y}$ 内所有 y 值*都成立.

如果将含参变量 y 的积分 (1) 与无穷函数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

(这里 x 起参变量的作用) 对比, 而回忆 **284** 段所说关于反常积分与无穷级数之间的相似性, 则上述定义与 **264** 段级数一致收敛性定义之间的完全平行的情况就显示出来了.

赛德尔与斯托克斯这两位最先把函数级数的一致收敛性与非一致收敛性区别开来的数学家 [**281** 段] 同时也对含参变量积分 $\int_a^{+\infty}$ 指出了类似的可能性.

例如, 看积分

$$\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx,$$

它在每个定值 $y \geqslant 0$ 之下都收敛.

我们直接来计算积分

$$\int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx.$$

在 $y=0$ 时它等于 0, 不论 A 取何值; 如果 $y>0$, 则由替换 $xy=t$ 不难得出

$$\int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx = \int_{Ay}^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-Ay}.$$

当 y 固定时这式子在 $A\to\infty$ 时显然趋于 0, 并且不论取怎样的 $\varepsilon > 0$, 不等式

$$e^{-Ay} < \varepsilon \tag{3}$$

将对所有 $A > A_0(y)$ 成立, 这里

$$A_0(y) = \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{y}$$

依赖于 y.

如果 y 的变化局限于区间 $[c,d]$ 内而 $c>0$, 则可找到这样一个与 y 无关的数 A_0, 使在 $A>A_0$ 时不等式 (3) 对所有 y 都成立: 只要取 $A_0(c)$ 作 A_0, 因为在 $A>A_0$ 时就有

$$e^{-Ay}\leqslant e^{-Ac}<\varepsilon\quad(c\leqslant y\leqslant d).$$

换句话说, 我们的积分对区间 $[c,d]$ 内的 y 一致收敛.

如果参变量 y 在区间 $[0,d]$ $(d>0)$ 内变化则情形就两样了. 这次这样的 A_0 已不存在 (至少当 $\varepsilon<1$ 时). 这一点甚至可以由此看出: 不论取多大的 A, e^{-Ay} 式在 $y\to 0$ 时恒趋于 1, 如此对充分小的 y 值它将大于任何数 $\varepsilon<1$. 该积分的收敛在 y 变化于区间 $[0,d]$ 内时已不是对 y 一致的了.

302. 一致收敛性的条件及充分检验法 利用函数一致趋于极限的一般检验法 [**295** 段, 1°] 可按当前情形将它陈述如下:

要积分 (1) 对 y 在区域 $\mathscr{Y}$ 内一致地收敛, 其必要而充分的条件是要在给定任一 $\varepsilon>0$ 时恒可找到这样一个与 y **无关**的*数 A_0, 使不等式*

$$\left|\int_a^{A'}f(x,y)dx-\int_a^{A}f(x,y)dx\right|=\left|\int_A^{A'}f(x,y)dx\right|<\varepsilon$$

同时对 $\mathscr{Y}$ 内一切 *y 值都成立, 只要 $A'>A>A_0$.*

现在来建立几个通常实际上用来判定积分一致收敛性的方法.

1°. 我们设函数 $f(x,y)$ 当 $x\geqslant a$ 时对 x 连续. *如果存在这样一个只与 x 有关的函数 $\varphi(x)$, 在无限区间 $[a,+\infty]$ 内可积, 且使在 $\mathscr{Y}$ 内所有 y 值之下恒有*

$$|f(x,y)|\leqslant\varphi(x)\quad(对\ x\geqslant a),$$

则积分 (1) 对 y (在 $\mathscr{Y}$ 内) **一致**地收敛.

这可直接由不等式

$$\left|\int_A^{A'}f(x,y)dx\right|\leqslant\int_A^{A'}|f(x,y)|dx\leqslant\int_A^{A'}\varphi(x)dx$$

推出, 只要利用刚才所证明的检验法.

在上述条件之下有时也说函数 $f(x,y)$ 有一*可积控制函数* $\varphi(x)$, 或者说积分 (1) 由不含参变量的收敛积分 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ *所控制*.

不难看出这种检验法与魏尔斯特拉斯的函数级数一致收敛性的著名检验法 [**265** 段] 的相似性.

例 1) 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{k^2+x^2}dx\quad(k\neq 0)$$

对参变量 a (在其任何变域内) 一致收敛, 因它为不含 a 的收敛积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{k^2+x^2}$$

所控制.

2°. 我们来看两个函数之积的积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\cdot g(x)dx, \tag{4a}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x,y)dx \tag{4b}$$

被积函数两因子中只有一个含有参变量 y, 它在某区域 $\mathscr{Y}$ 内变化. 对这些积分我们要陈述较精致的一致收敛性检验法, 它可模仿 **287** 段而得.

函数 f 和 g (必要时取 $y=$ 常数) 我们也如在那里一样看作是 x 的连续函数, 而 g 还要是单调的并且对 x 有连续导函数. 于是

(I) 如果 1) 积分

$$\Phi(A,y)=\int_a^A f(x,y)dx$$

对所有 A 及所有 y 一致有界:

$$|\Phi(A,y)| \leqslant K \quad (K \text{ 为常数})$$

并且 2) $x\to\infty$ 时 $g(x)\to 0$, 则积分 (4a) 对 $\mathscr{Y}$ 内的 y 一致收敛, 同样

(II) 如果 1′) 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

收敛, 而 2′) 函数 $g(x,y)$ 对所有 x 及所有 y 一致有界:

$$|g(x,y)| \leqslant L \quad (L \text{ 为常数}),$$

则积分 (4b) 对 y 一致收敛.

至于证明, 则它其实仍与以前一样, 因为 —— 由于常数 K 及 L 都与 y 无关 —— 对积分

$$\int_A^{A'} f\cdot g dx$$

可得出与 y 无关的估值, 这就保证了一致收敛性.

2) 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{k^2+x^2}dx$$

对 a 在 $a \geqslant a_0 > 0$ 时一致收敛 (按检验法 (I)). 事实上, 令 $f(x,a) = \sin ax$ 我们有

$$\left|\int_0^A \sin ax dx\right| = \frac{1-\cos aA}{a} \leqslant \frac{2}{a_0} = K;$$

另一方面, 函数

$$g(x) = \frac{x}{k^2+x^2}$$

单调递减 (至少对充分大的 x 是如此) 而在 $x \to \infty$ 时趋于 0.

3) 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$$

按检验法 (II) 对 a $(a \geqslant 0)$ 一致收敛. 这里 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 由 0 至 $+\infty$ 可积分, 而 (广义) 单调递减函数 $g(x,a) = e^{-ax}$ 以 1 为界.

303. 带有限积分限的积分 我们现在来考虑一个函数 $f(x,y)$, 它对有限区间 $[a,b]$ 内的 x 值及某区域 $\mathscr{Y}$ 内的 y 值有定义; 设 y 为常量时它对 x 由 a 至 b 可积分 (在常义积分或反常积分的意义下). 于是无论积分

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx, \tag{5}$$

是常义积分或反常积分, 它都是当 $\eta \to 0$ 时积分

$$\varphi(\eta,y) = \int_a^{b-\eta} f(x,y)dx \tag{6}$$

的极限.

如果这个积分在 $\eta \to 0$ 时对区域 $\mathscr{Y}$ 内的 y **一致**趋于极限 $I(y)$, 则称积分 (5) 对该区域内的 y **一致地**收敛.

这就是说, 对任何一个 $\varepsilon > 0$ 恒可找到这样一个与 y 无关的数 $\delta > 0$, 使得, 只要 $\eta \leqslant \delta$ 时, 不等式

$$\left|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^{b-\eta} f(x,y)dx\right| = \left|\int_{b-\eta}^b f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

就同时对 $\mathscr{Y}$ 内所有 y 值都成立.

不难在此陈述一致收敛性的必要而充分的条件, 同样也可将 **302** 段的充分条件搬到当前的情形上来. 这让读者自己去做.

我们曾将由 a 至 b 的积分 (5) 看作由 a 至 $b-\eta$ 的积分 (6) 的极限并且注意后面的积分逼近它的极限的特性. 如此, 点 $x = b$ 在这里占特殊的地位 (像 **301** 段中点 $x = +\infty$ 一样). 但在某些情形 (这种情形以后说明) 也有必要给予区间内别的点以类似的地位. 例如, 同一积分 (5) 也可看作积分

$$\psi(\eta,y) = \int_{a+\eta}^b f(x,y)dx$$

在 $\eta \to 0$ 时的极限. 如果在 $\eta \to 0$ 时后面的积分对 y 一致地逼近它, 则也可以说积分 (5) 一致收敛. 全部以上所说的都可搬到这情形上来.

如果遇到需要分清是哪一种一致收敛的情形时则我们说, 该积分各在 $x = +\infty$, $x = b$ 或 $x = a$ 等时一致收敛 (对某区域内的 y).

要注意的是, 对于比如说在 $x = b$ 时积分 (5) 的一致收敛性, 我们通常感兴趣的是当点 $x = b$ 就是积分 (5) 的奇点 (指 **288** 段中的意义) —— 在 y 取某些值的时候 —— 的那些情形, 但这定义当积分 (5) 在一切值都正常的时候不仅形式上保持有效, 而我们将看到在这情形也的确可能有用处.

例如, 积分

$$\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx$$

对区间 $[0, d]$ $(d > 0)$ 内每一个 y 值都将存在而且为常义积分. 但对 y 的这一变化区间它的收敛性在 $x = 0$ 时不是一致的. 事实上, 只要 $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ 不等式

$$\int_0^\eta \frac{ydx}{x^2+y^2} = \arctan\frac{\eta}{y} < \varepsilon$$

就不能对一切 $y > 0$ 的值都成立: 不管 η 取多小, 不等式左边在 $y \to 0$ 时总趋于 $\frac{\pi}{2}$, 因而对充分小的 y 值必定大于 ε.

§3. 积分一致收敛性的应用

304. 积分号下取极限 现在我们来讨论带无限积分限的积分

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx, \tag{1}$$

它含有参变量 y (在区域 $\mathscr{Y}$ 内变化), 并且来证明一系列与 **296**—**298** 段对常义积分所建立的诸定理相类似的定理. 由一些定理过渡到另一些定理时可遵循 **266**—**270** 段中由函数有限和性质过渡到无穷函数级数和情形时的同样步骤. 正如那里函数级数一致收敛性起决定性作用一样, 这里 (1) 形积分一致收敛性也起同样的作用. 如此, 我们的指导思想还是那无穷级数与反常积分之间的相似性, 这我们已屡次强调过了 [**284**, **301** 段].

我们由扩展在无限区间上的积分的积分号下取极限问题开始.

296 段的定理 1 不能推广到这个情形上: 在全无限区间内即使函数 $f(x,y)$ 在 $y \to y_0$ 时一致趋于极限函数 $\varphi(x)$, 积分号下取极限也仍可能是不容许的.

例如我们来看函数 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$:

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{n}{x^3} \cdot e^{-\frac{n}{2x^2}} \quad (x > 0), \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$$

由寻常微分学方法不难确定, 这个函数在 $x=\sqrt{\frac{n}{3}}$ 时达最大值, 即等于 $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}}e^{-\frac{3}{2}}$. 因为在 $n\to\infty$ 时这个值趋于 0, 故由此可见, 函数 $f_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时在全区间 $[0,\infty]$ 内一致趋于 $\varphi(x)=0$. 可是在 $n\to\infty$ 时积分

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx=1$$

完全不趋于 0.

可能在积分号下取极限的充分条件由下面的定理给出:

定理 1 设函数 $f(x,y)$ 对 $x\geqslant a$ 及 $\mathscr{Y}$ 内的 y 有定义: 1) 对 x 连续并且 2) $y\to y_0$ 时在每一有限区间 $[a,A]$ 内对 x **一致地**趋于极限函数 $\varphi(x)$. 更设 3) 积分 (1) 对区域 $\mathscr{Y}$ 内的 y **一致**收敛. 于是有

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx. \tag{2}$$

我们首先注意, 函数 $\varphi(x)$ 也是连续的 [**295** 段, 2°]. 按一致收敛性条件 [**302** 段] 对任何 $\varepsilon>0$ 恒可找到这样一个 $A_0>a$, 使

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right|<\varepsilon$$

对 $\mathscr{Y}$ 内所有 y 值同时成立, 只要是 $A'>A>A_0$. 这里在积分号下取 $y\to y_0$ 时的极限 [**296** 段, 定理 1] 我们得

$$\left|\int_A^{A'}\varphi(x)dx\right|<\varepsilon,$$

由此推知 [**286** 段] 函数 $\varphi(x)$ 在无限区间 $[0,+\infty]$ 内可积分.

其次, 在任何 $A>a$ 之下我们有:

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)dx-\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx\right|\leqslant\left|\int_a^{A} f(x,y)dx-\int_a^{A}\varphi(x)dx\right|$$
$$+\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right|+\left|\int_A^{+\infty}\varphi(x)dx\right|.$$

如果取任意一个数 $\varepsilon>0$, 则可先指定 A 值使右边第二项及第三项变成 $<\frac{\varepsilon}{3}$ (与 y 无关!), 然后令 y 充分接近 y_0, 而使第一项也 $<\frac{\varepsilon}{3}$ [**296** 段]. 于是, 对上述 y 值有

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)dx-\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx\right|<\varepsilon,$$

这就得到 (2).

由此应用推广的迪尼定理 [**295** 段, 3°] 可得出

推论 设**非负**函数 $f(x,y)$ 对 x 在 $x \geqslant a$ 内连续并且随 y 增大而递增地趋于极限函数 $\varphi(x)$, 它也在该区间内连续. 于是由积分

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \tag{3}$$

的存在可推出积分 (1) 的存在 (对 $\mathscr{Y}$ 内所有 y 值) 并且公式 (2) 成立.

按所说的定理在该条件下函数 $f(x,y)$ 的趋于 $\varphi(x)$ 对任何有限区间内的 x 而言是一致的. 其次, 由 **285** 段的定理 1 积分 (1) 是存在的, 因为

$$f(x,y) \leqslant \varphi(x).$$

函数 $\varphi(x)$ 同时也起到控制函数的作用 [**302** 段], 保证了积分 (1) 对 y 的一致收敛性. 如此, 符合了所有应用前一定理的条件.

对函数序列 $\{f_n(x)\}$ 常常须用到积分号下取极限. 如此, 由序列过渡到无穷级数可以得出关于函数级数逐项积分的新定理.

例如, 看看这时上面的推论成为什么形式:

设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

由在 $x \geqslant a$ 时为**正且连续**的函数所组成而对这些 x 值有**连续的和** $\varphi(x)$. 如果和函数在区间 $[a,+\infty]$ 内可积分, 则在此区间内该级数可**逐项**积分.

最后, 下面这个关于积分 (1) 对参变量的连续性的定理也是定理 1 的简单推论.

定理 2 设函数 $f(x,y)$ (作为二元函数) 对 $x \geqslant a$ 及区间 $[c,d]$ 内的 y 值而言有定义并且连续. 如果积分 (1) 对区间 $[c,d]$ 内的 y 而言一致收敛, 则它在此区间内是参变量 y 的连续函数.

事实上, 如我们在 **296** 段中所见, 当 x 在任何有限区间 $[a,A]$ 内变化时函数 $f(x,y)$ 于 $y \to y_0$ 时 (y_0 为 y 的任一特殊值) 对 x 而言一致趋于极限函数 $f(x,y_0)$. 而此时按定理 1 在积分 (1) 中可于积分号下取极限:

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} f(x,y_0)dx = I(y_0),$$

这就证明了我们的断言.

也可很简单地证明下面和迪尼定理的类似的定理 [**267** 段]:

定理 3 如果连续函数 $f(x,y)$ 非负, 则由积分 (1) 作为参变量函数时的连续性可推出其收敛性是一致的.

在这情形 y 的 [按 **296** 段, 定理 2] 连续函数

$$\int_a^A f(x,y)dx$$

随 A 俱增因此而 [按 **295** 段, 3° 推广的迪尼定理] 对 y 一致趋于其极限 (1), 这就是所要证明的.

305. 积分依参变量的积分法 先来证明下面这一定理:

定理 4 *在定理 2 的假设下成立公式:*

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy. \tag{4}$$

事实上, 在任何 $A > a$ 之下

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^A f(x,y)dx + \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x,y)dx;$$

但按 **298** 段的定理 4

$$\int_c^d dy \int_a^A f dx = \int_a^A dx \int_c^d f dy,$$

如此差式

$$\int_c^d I(y)dy - \int_a^A dx \int_c^d f dy$$

可写成这样:

$$\int_c^d I(y)dy - \int_c^d dy \int_a^A f dx = \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f dx.$$

如果现在 —— 取任意小的 $\varepsilon > 0$ 时 —— 将 A 取得这样大, 而使在所有 y 值之下

$$\left| \int_A^{+\infty} f dx \right| < \varepsilon,$$

则上面的差数的绝对值将小于 $\varepsilon(d-c)$. 在这情形

$$\int_c^d I(y)dy = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A dx \int_c^d f dy,$$

这就等价于 (4).

如果利用 [**304** 段] 定理 3, 则不难由此导出这样的

推论 *在非负函数 $f(x,y)$ 的情形仅由积分 (1) 对 y 的连续性就可推出公式 (4).*

如此, 我们在一定条件下建立了这样两个积分彼此调换次序的合法性: 一个扩展在无限区间上, 而另一个扩展在有限区间上.

然而在许多情形, 我们正是需要按下列公式对调两个都取在无限区间内的积分, 对应的公式是

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy. \tag{5}$$

要证实这种对调的合法性往往是一件复杂而细致的事情.

只有对很窄的一类情形能以一般方式建立公式 (5); 例如:

定理 5 设函数 $f(x,y)$ 对 $x \geqslant a$ 及 $y \geqslant c$ 有定义而连续并且**非负**, 我们更假设两个积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx, \quad \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

是**连续**函数—— 第一个是 y 的, 第二个是 x 的. 于是, 如果下面两个累次积分中有一个存在:

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx, \quad \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy, \tag{6}$$

则另一个也存在, 并且等式 (5) 成立.

设积分 (6) 中第二个存在. 按前面的推论, 对任一有限的 $C > c$ 将有

$$\int_c^{C} dy \int_a^{+\infty} f dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{C} f dy. \tag{7}$$

右边积分的被积函数

$$\int_c^{C} f dy$$

作为 x 和 C 的函数是对 x 连续的 [**296** 段, 定理 2] 并且 —— 随着 C 的增至无穷 —— 递增而趋于函数

$$\int_c^{+\infty} f dy,$$

它按假设是连续的并且可以对 x 由 a 至 $+\infty$ 积分. 应用 **304** 段的推论到 (7) 式右边的积分上我们可以在这积分的积分号下取 $C \to +\infty$ 时的极限. 在这样的情形不但是 (7) 式右边的积分的极限 (即积分 (6) 中第一个) 存在, 并且两个累次积分还彼此相等.

306. 积分依参变量的微分法 我们由前段定理 4 来导出一个关于这种微分法的定理, 这正与以前依据 **269** 段的定理 4 证明 **270** 段中的定理 5 的情形相似.

定理 6 设函数 $f(x,y)$ 对 $x \geqslant a$ 及 $[c,d]$ 内的 y 有定义, 依 x 连续, 并且对上述值有依两个变量连续的导函数 $f'_y(x,y)$. 更设积分 (1) 对所有 $[c,d]$ 内的 y 值都**收敛**, 而积分

$$\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \tag{8}$$

不但存在, 并且在同一区间内还对 y **一致**收敛. 于是对 $[c,d]$ 内任何 y 值成立公式

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx.$$

应用定理 4 于函数 $f'_y(x,y)$, 只是 d 代之以任何 y $(c \leqslant y \leqslant d)$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_c^{y} dy \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx &= \int_a^{+\infty} dx \int_c^{y} f'_y(x,y)dy \\ &= \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty} f(x,c)dx.\end{aligned}$$

因为左边积分的被积函数, 即积分

$$\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$$

是 y 的连续函数 [按 **304** 段, 定理 2], 则它就是左边的积分对 y 的导函数 [**183** 段, 12°], 等式右边的积分 (1) 既与左边积分只差一常数, 则它也是积分 (1) 的导函数. 如此本定理得证.

307. 关于带有限积分限的积分的一个笺注 我们已详细讨论积分

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \tag{1}$$

的性质问题, 对该积分 x 的唯一奇值为 $+\infty$. 类似的理论也可对这样的情形来建立: x 的奇值有限, 比如说与积分

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx \tag{9}$$

的上限 b 相同时. 在所有已证明的论断里可以令 b 代替 $+\infty$ 的地位, 即凡 $x=+\infty$ 时的一致收敛性处处都改成 $x=b$ 时的一致收敛性 [**303** 段]. 例如, 定理 1 可改换成:

定理 1* 设函数 $f(x,y)$ 对 $a \leqslant x < b$ 及 $\mathscr{Y}$ 内的 y 值有定义而且: 1) 对 x 连续, 2) $y \to y_0$ 时在每个区间 $[a, b-\eta]$ 内对 x**一致**趋于极限函数 $\varphi(x)$, 如果此外 3) 积分 (9) 在区域 $\mathscr{Y}$ 内对 y **一致**收敛, 则

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

当然, 有时同一积分 (1) 中可以有两个奇值 x, 比如说 $x=a$ 及 $x=+\infty$. 所有那些论断也仍可搬到这情形上来; 但常常比较方便的还是就把积分 (1) 表示为两个之和的形式:

$$\int_a^{+\infty} = \int_a^b + \int_b^{+\infty} \quad (a < b < +\infty),$$

再把所讲的理论分别应用于每一项上.

308. 一些反常积分的计算 带参变量的积分的理论可用来计算许多古典的反常积分.

1°. 我们来计算下面的积分 (欧拉)

$$E = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}dx.$$

首先来确定, 这个积分一般对哪些参数值 a 有意义. 奇值是 $x=+\infty, x=0$ ($a \geqslant 1$ 时第二点就不是奇值了). 我们把这积分分解成两个:

$$E = E_1 + E_2 = \int_0^1 + \int_1^{+\infty};$$

第一个在 $a>0$ 时存在, 因为 (如果 $a<1$) 被积函数在 $x\to 0$ 时比起 $\dfrac{1}{x}$ 来成 $1-a<1$ 阶的无穷大 [**290** 段], 而第二个在 $a<1$ 时存在: 此时被积函数在 $x\to+\infty$ 时比起 $\dfrac{1}{x}$ 来成 $2-a>1$ 阶的无穷小 [**285** 段]. 如此该积分在 $0<a<1$ 时收敛; 我们就在这假设之下来计算它.

对 $0<x<1$ 我们有级数展开式

$$\frac{x^{a-1}}{1+x}=\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}x^{a+\mu-1},$$

它只要 $0<\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon'<1$ 就一致收敛. 但其部分和在 $[0,1]$ 中有可积分的控制函数

$$0\leqslant\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^{\mu}x^{a+\mu-1}=\frac{x^{a-1}[1-(-x)^{n}]}{1+x}<x^{a-1},$$

所以它的积分在 $x=0$ 及 $x=1$ 时都一致收敛. 按修改过的定理 1 逐项积分得:

$$E_1=\sum_{\mu=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^{\mu}x^{a+\mu-1}dx=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu}}{a+\mu}.$$

积分 E_2 由替换 $x=\dfrac{1}{z}$ 化为

$$E_2=\int_0^1\frac{x^{-a}}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^{(1-a)-1}}{1+x}dx.$$

应用上面已经得到的展开式我们求出:

$$E_2=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu}}{a-\mu}.$$

如此,

$$E=\frac{1}{a}+\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{a+\mu}+\frac{1}{a-\mu}\right).$$

我们已经知道函数 $\dfrac{1}{\sin t}$ 的 “简单分式分解” [**293** 段, 3°; 参看下面 **406** 段, 3) 附注]:

$$\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t}+\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right),$$

这里设 $t=\pi a$. 我们得最后的结果:

$$E=\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin\pi a}\quad(0<a<1).$$

2°. 要计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

[参看 **293** 段, 3°] 我们来考虑一个比较一般的含参变量的积分:

$$I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \quad (a \geqslant 0),$$

前一积分可由此取 $a = 0$ 而得. 我们已经知道, 积分 $I(a)$ 在 $a \geqslant 0$ 时对 a 一致收敛 [**302** 段, 3)], 并且因此按 **304** 段的定理 2 对那些值而言是参变量 a 的连续函数. 特别是

$$I(0) = \lim_{a \to 0} I(a). \tag{10}$$

现在我们来求 $a > 0$ 时的导数 $I'(a)$. 在积分号下微分, 我们得

$$I'(a) = -\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx = -\frac{1}{1+a^2}$$

[**283** 段, 5)]. 这个积分对 $a \geqslant a_0$ 一致收敛 (a_0 是任一指定的数, 大于 0), 因为它被收敛积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-a_0 x} dx$$

所控制 [**302** 段, 1°]; 所以, 至少对上述 a 值应用 **306** 段的定理 6 是可以的. 但不论 $a > 0$ 如何选取, 总可选取这样一个 $a_0 > 0$ 而使 $a > a_0$. 这就是说, 所得结果对任何 $a > 0$ 都是对的. 在这样的情形对 $a > 0$ 我们有

$$I(a) = C - \arctan a.$$

要决定常数 C 我们令 a 趋于 $+\infty$; 因为

$$|I(a)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

故在此 $I(a) \to 0$, 而得出 C 等于 $\frac{\pi}{2}$. 最后由 (10) 有

$$I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3°. 要重新来计算积分

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

[参看 **293** 段, 2°], 我们令其中 $x = ut$ 而 u 是一个任意的正数; 如此得

$$K = u \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt.$$

现在将这等式两边乘以 $e^{-u^2}du$ 而依 u 由 0 至 $+\infty$ 积分:

$$K\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = K^2 = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}udu\int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}dt.$$

不难看出, 在此把两积分对调就可很快地得出结果. 事实上, 对调后得

$$K^2 = \int_0^{+\infty} dt\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2}\cdot udu = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

因此 (因为显然 $K>0$)

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

要证实上述积分的对调是合理的我们利用 **305** 段的定理 5. 虽然积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2}udu = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

对所有 $t\geqslant 0$ 是 t 的连续函数, 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2}udt = e^{-u^2}K$$

则只对 $u>0$ 连续, 而 $u=0$ 时它等于 0, 在这点上就不连续了. 所以不能直接应用定理 5 于矩形 $[0,\infty;0,\infty]$! 我们将它应用于矩形 $[u_0,\infty;0,\infty]$ $(u_0>0)$, 这里利用了, 积分

$$\int_{u_0}^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2}udu = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}e^{-(1+t^2)u_0}$$

对所有 $t\geqslant 0$ 都是 t 的连续函数. 由此证实了等式

$$\int_{u_0}^{+\infty} du\int_0^{+\infty} e^{-u^2(1+t^2)}udt = \int_0^{+\infty} dt\int_{u_0}^{+\infty} e^{-u^2(1+t^2)}udu.$$

剩下只要把 u_0 变小而取 $u_0\to 0$ 的极限, 在此右边的极限能在积分号下来取 —— 根据 **304** 段的推论.

4°. 最后, 来看所谓拉普拉斯[①]积分:

$$y = \int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{k^2+x^2}dx \quad 及 \quad z = \int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{k^2+x^2}dx.$$

首先我们指出第一积分 y 对参变量 a 一致收敛, 因此 (由定理 2) 也就对 a 连续, 并且是对一切值 $a\geqslant 0$ [参看 **302** 段, 1)]. 假定 $a>0$, 由积分号下对 a 微分 (定理 6) 我们建立

$$\frac{dy}{da} = -z; \tag{11}$$

[①] Pierre–Simon Laplace (1749—1827) 是法国杰出天文学家、数学家兼物理学家.

这里我们依据的是第二积分 z 对所有 $a \geqslant a_0$ 的一致收敛性, 而 a_0 是一个任意指定的正数 [参看 **302** 段, 2)].

再对 a 在积分号下进行微分是不可能了, 因为这样微分的结果将得出发散的积分.

但是, 如果在上面的等式和等式 (参看上面 2°)

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx^{①},$$

两边相加, 则得

$$\frac{dy}{da} + \frac{\pi}{2} = k^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(k^2+x^2)} dx.$$

这里积分号下的微分又成为可能了, 如此我们得出

$$\frac{d^2y}{da^2} = k^2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2+x^2} dx,$$

所以

$$\frac{d^2y}{da^2} = k^2 y.$$

对这个简单的带常系数二阶线性微分方程不难依 "特征方程" 的根 $\pm k$ 组成通解

$$y = C_1 e^{ka} + C_2 e^{-ka}, \tag{12}$$

这里 C_1 和 C_2 是常数. 但在所有 a 值之下变量 y 是有界的:

$$|y| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{\pi}{2k},$$

这就是说, 必须 $C_1 = 0$ (否则 $a \to +\infty$ 时 y 将无限制增大). 要决定 C_2 我们令 $a = 0$, 因为由于 y 的连续性关系式 (12) 在这个 a 值上仍保持有效; 于是显然

$$C_2 = \frac{\pi}{2k}.$$

最后,

$$y = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2k} e^{-ka} \quad (a \geqslant 0).$$

因此 z 又可由微分定出 [参看 (11)]:

$$z = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{k^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ka} \quad (a > 0).$$

①但是下面我们完全不需要这个积分的值; 只要知道它在所有 $a > 0$ 之下恒为常数, 而这不难由简单替换 $t = ax$ 看出.

§4. 欧拉积分

309. 第一类欧拉积分 根据勒让德的提议称具有如下形状的积分为第一类欧拉积分:

$$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx, \tag{1}$$

这里 $a,b>0$. 它代表一个双参变量 a,b 的函数: B 函数 (读如 "贝塔函数").

我们知道所考虑的积分对 a 和 b 的正值 (即使小于 1) 是收敛的[①]. 因此它的确可以作为 B 函数的定义. 我们来建立它的一些性质.

1°. 首先立即可以得出 (由替换 $x=1-t$):

$$\mathrm{B}(a,b)=\mathrm{B}(b,a),$$

如此, B 函数对 a 与 b 是对称的.

2°. 由公式 (1) 的分部积分在 $b>1$ 时我们得到[②]:

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(a,b)&=\int_0^1(1-x)^{b-1}d\left(\frac{x^a}{a}\right)\\&=\left.\frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a}\right|_0^1+\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx\\&=\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx-\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\\&=\frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a,b-1)-\frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a,b),\end{aligned}$$

由此有

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}\mathrm{B}(a,b-1). \tag{2}$$

这个公式可用来逐步减小 b, 直到它不大于 1 为止; 如此恒可使第二自变量变成 $\leqslant 1$.

但是这对第一个自变量也同样可以做到, 因为由于 B 的对称性也成立另一个递推公式:

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{a-1}{a+b-1}\mathrm{B}(a-1,b)\quad(a>1). \tag{2'}$$

如果 b 等于正整数 n, 则累次应用公式 (2) 可得:

$$\mathrm{B}(a,n)=\frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{a+1}\mathrm{B}(a,1).$$

---

①反之, 参变量 a,b 之值如有一个 $\leqslant 0$, 则该积分发散.

②我们在此利用恒等式

$$x^a(1-x)^{b-2}=x^{a-1}(1-x)^{b-2}-x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

但

$$B(a,1)=\int_0^1 x^{a-1}dx=\frac{1}{a}.$$

所以对 $B(a,n)$ 和 $B(n,a)$ 同时可得出这最后的式子

$$B(n,a)=B(a,n)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)}{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\cdots\cdot(a+n-1)}. \tag{3}$$

如果 a 也等于一个正整数 m, 则

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

如果 0! 这个符号理解为 1, 则这个公式在 $m=1$ 或 $n=1$ 时也可应用.

3°. 我们给 B 函数另外一种解析表出法, 它也常常有用. 即, 如果在积分 (1) 中作替换 $x=\frac{y}{1+y}$, 而 y 是一个新变量, 由 0 变至 $+\infty$, 则又得出

$$B(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy. \tag{4}$$

这里令 $b=1-a$ (假设 $0<a<1$) 我们得到

$$B(a,1-a)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{a-1}}{1+y}dy.$$

上面算出的那个积分, 也与欧拉有关, 它是读者已经知道的了 [**308** 段, 1°]. 代入其值得公式

$$B(a,1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}\quad(0<a<1). \tag{5}$$

如果特别取

$$a=1-a=\frac{1}{2},$$

则得

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi.$$

我们只讲 B 函数的这几个性质, 因为下面 [**311** 段, 4°] 可以知道它能很简单地以另一种函数 —— "Γ 函数" —— 表出, 这种函数我们将讲得较为详细.

310. 第二类欧拉积分 这个名称勒让德用来指这个重要的积分:

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}dx, \tag{6}$$

它对任何 $a>0$ 都收敛 [**290** 段, 4)][①], 而定义一个 Γ 函数 (伽马函数). Γ 函数是在分析及其应用上最重要的函数之一, 仅次于初等函数. Γ 函数的性质如由其积分定义 (6) 出发来研究则同时也可作为以前所讲含参变量积分理论的最好应用实例.

① $a\leqslant 0$ 时该积分发散.

如果在 (6) 中令

$$x = \ln \frac{1}{z},$$

则得

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{z}\right)^{a-1} dz.$$

我们知道 [**65** 段, 2)]

$$\ln \frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty} n(1 - z^{\frac{1}{n}}).$$

这里 $n(1-z^{\frac{1}{n}})$ 随 n 俱增而趋于其极限①. 在这情形根据 **304** 段 (推论) 及 **307** 段有

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^{a-1} \int_0^1 (1 - z^{\frac{1}{n}})^{a-1} dz$$

或用替换 $z = y^n$ 而成

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1} dy.$$

但按 (3) 有

$$\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1} dy = \mathrm{B}(n, a) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot (n-1)}{a\cdot (a+1)\cdot (a+2)\cdot \cdots \cdot (a+n-1)}.$$

如此, 终于得出下面著名的欧拉 – 高斯公式:

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot (n-1)}{a\cdot (a+1)\cdot (a+2)\cdot \cdots \cdot (a+n-1)}.$$

这个公式欧拉于 1729 年已写信告诉哥德巴赫 (Goldbach), 但被遗忘. 后来高斯即根据它作函数 $\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$ 的定义. 勒让德及罗巴切夫斯基都对 Γ 函数有很多研究, 而罗氏的出发点是他对 Γ 函数的独特定义, 这个定义利用了无穷级数.

311. Γ 函数的简单性质 1°. 函数 $\Gamma(a)$ 在所有 $a > 0$ 值之下连续且有各阶连续导函数. 这只要证明各个导函数存在就行了. 在积分号下微分积分 (6), 得

$$\Gamma'(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot \ln x \cdot e^{-x} dx. \tag{7}$$

因为两个积分

$$\int_0^1 x^{a-1} \cdot \ln x \cdot e^{-x} dx \quad 及 \quad \int_1^{+\infty} x^{a-1} \cdot \ln x \cdot e^{-x} dx$$

①这只要将 $\dfrac{1 - z^\alpha}{\alpha}$ 一式看作 α 的函数即可由微分学方法看出.

都对 a 一致收敛: 第一个在 $x=0$ 时对 $a \geqslant a_0 > 0$ 一致收敛 (控制函数为 $x^{a_0-1}|\ln x|$), 第二个在 $x=+\infty$ 时对 $a \leqslant A < +\infty$ 一致收敛 (控制函数是 $x^A e^{-x}$[1]); 所以在此可应用莱布尼茨法则.

同样方式可证二阶及其他高阶导函数也都存在:

$$\Gamma''(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}(\ln x)^2 e^{-x} dx, \text{ 等等.} \tag{7*}$$

2°. 由 (6) 用分部积分法立即得出:

$$a\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = x^a e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x^a e^{-x}dx,$$

即

$$\Gamma(a+1) = a\cdot\Gamma(a). \tag{8}$$

重复施用这个公式可得

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)\cdot(a+n-2)\cdot\cdots\cdot(a+1)\cdot a\Gamma(a). \tag{8*}$$

这样要对任意自变量 a 计算 Γ 时可归结为对 $0<a\leqslant 1$ (或对 $1<a\leqslant 2$ 也可随方便而定) 的计算.

如果在 (8*) 中取 $a=1$ 而注意

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1, \tag{9}$$

则得

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{10}$$

如此, Γ 函数就是 $n!$ 的自然推广 —— 后者本来只对正整数有定义, 现在推广到自变量是**任何**正数的范围.

3°. Γ 函数的变化情况. 现在我们可以对函数 $\Gamma(a)$ 在 a 由 0 增至 $+\infty$ 时的变化情况有一个全盘的概念.

由 (9) 及 (10) 我们有: $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, 如此按罗尔定理在 1 与 2 之间导函数 $\Gamma'(a)$ 应该有一个根 a_0. 这个导函数总是递增的, 因为二阶导数由其表达式 (7*) 可以看出总是正的. 所以, 在 $0<a<a_0$ 时导数 $\Gamma'(a)<0$ 而函数 $\Gamma(a)$ 递减, 在 $a_0<a<+\infty$ 时 $\Gamma'(a)>0$ 而 $\Gamma(a)$ 递增; 在 $a=a_0$ 有一极小值. 可算出 (计算步骤不写出来了):

$$a_0 = 1.4616\cdots, \min\Gamma(a) = \Gamma(a_0) = 0.8856\cdots.$$

---

[1] 对 $x>0$ 显然 $\ln x < x$.

还有值得来确定的是 $\Gamma(a)$ 在 a 趋于 0 或 $+\infty$ 时的极限. 由 (8) (并由 1°) 显然在 $a \to +0$ 时

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \to +\infty.$$

另一方面由 (10) 知道只要 $a > n+1$ 就有

$$\Gamma(a) > n!,$$

即在 $a \to +\infty$ 时也有 $\Gamma(a) \to +\infty$.

函数 $\Gamma(a)$ 的图像如图 5.

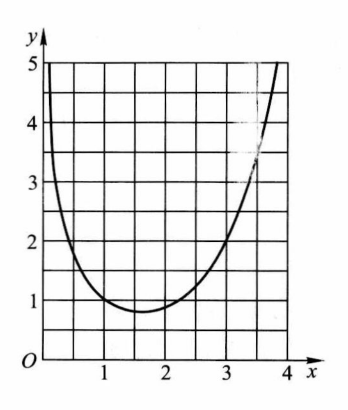


图 5

4°. B 函数与 Γ 函数间的关系. 要建立这种关系我们用替换 $x = ty$ $(t > 0)$ 将 (6) 变为这样的形式:

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-ty} dy. \tag{11}$$

在此以 $a+b$ 替代 a 同时以 $1+t$ 替代 t, 如此得

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

现在将这个等式两边乘以 t^{a-1}, 而对 t 由 0 至 $+\infty$ 积分:

$$\Gamma(a+b) \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = \int_0^{+\infty} t^{a-1} dt \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

左边的积分我们认出就是函数 $\mathrm{B}(a,b)$ [参看 (4)]; 右边则我们将两个积分号调换次序. 结果得出 [考虑到 (11) 和 (6)]:

$$\begin{aligned}\Gamma(a+b) \cdot \mathrm{B}(a,b) &= \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-ty} dt \\ &= \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-y} \cdot \frac{\Gamma(a)}{y^a} dy = \Gamma(a) \int_0^{+\infty} y^{b-1} e^{-y} dy \\ &= \Gamma(a) \cdot \Gamma(b),\end{aligned}$$

由此最后有

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{12}$$

这个欧拉关系式的上述精彩的推导法出于狄利克雷. 但还需证明这里积分次序可以对调.

我们首先在假设 $a > 1, b > 1$ 之下来证明这一点. 于是函数

$$t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y}$$

满足 **305** 段的定理 5 的所有条件: 这个函数对 $y \geqslant 0$ 及 $t \geqslant 0$ 连续 (并且是正的), 而积分

$$t^{a-1}\int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy = \Gamma(a+b)\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}$$

及

$$y^{a+b-1}e^{-y}\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-ty}dt = \Gamma(a)y^{b-1}e^{-y}$$

也都是连续函数: 第一个对变量 t 在 $t \geqslant 0$ 时而言, 第二个则对变量 y 在 $y \geqslant 0$ 时而言. 如此按该定理知积分次序调换是合理的, 并且也就对 $a > 1, b > 1$ 的情形证明了公式 (12).

如果只知道 $a > 0, b > 0$, 则按已证我们有

$$\mathrm{B}(a+1,b+1) = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}.$$

由此, 利用 B 函数的递推公式 (2), (2′) 及 Γ 函数的递推公式 (8), 不难重新得出公式 (12), 这回已没有不必要的限制.

5°. *余项公式*. 如果在公式 (12) 里令 $b = 1 - a$ (认为 $0 < a < 1$) 则由 (5) 和 (9) 可得出关系:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \tag{13}$$

它叫做*余项公式*.

在 $a = \dfrac{1}{2}$ 时由此可求得 (因为 $\Gamma(a) > 0$)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{14}$$

在积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}dz = \sqrt{\pi}$$

中作替换 $z = x^2$ 我们重新得出已知的积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6°. *勒让德公式*. 如果在下列积分

$$\mathrm{B}(a,a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{a-1} dx$$
$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{a-1} dx$$

中作替换

$$\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{t},$$

则得

$$\mathrm{B}(a,a)=\frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{a-1}dt=\frac{1}{2^{2a-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},a\right).$$

我们将两个 B 函数都换成它们的 Γ 表达式 (12):

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}.$$

约去 $\Gamma(a)$ 并将 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ 用它的值 $\sqrt{\pi}$ 代入 [参看 (14)], 即得下面的**勒让德公式**:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

还有许多别的足以显露 Γ 函数深入性质的公式, 我们不能在此细讲了; 同样也不能讲 Γ 函数本身及其对数值的近似计算法. 我们只能提一提, 勒让德已经利用 Γ 函数的性质及无穷级数工具做成了 $\Gamma(a)$ 的常用对数值表, a 由 1 至 2 以间隔 0.001 给出, 开始是带 7 位数字的, 后来是 12 位的.

这种已经不是初等的新函数 Γ 也如通常所谓初等函数一样地被我们所掌握了.

312. 例 现在我们举一些应用 Γ 函数的例子.

1) 积分

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx\quad (p,q,m>0)$$

由替换 $x^m=y$ 可立即化为第一类欧拉积分:

$$\frac{1}{m}\mathrm{B}\left(\frac{p}{m},q\right)=\frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}.$$

2) 我们来计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi d\varphi\quad (a,b>0).$$

如果令 $x=\sin\varphi$, 则它化为积分

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x^2)^{\frac{b}{2}-1}dx.$$

利用前例有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

特例, 在 $b=1$ 时由此得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

不难验证, 这一个公式就包含 **187** 段的两个公式 (5).

如果在原积分中取 $a=1+c, b=1-c$, 而 $|c|<1$, 则得 (应用余项公式)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^c\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{\pi}{2\cos\frac{c\pi}{2}}.$$

3) 最后, 我们再来看一个积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{\frac{p}{q}} x}{x} dx,$$

这里 p 和 q 是互素奇数.

将该积分改写为

$$\int_0^{+\infty} \sin^{\frac{p-q}{q}} x \cdot \frac{\sin x}{x} dx,$$

而在它上面应用 **293** 段上讲过的罗巴切夫斯基一般公式, 使这个公式能成立的条件:

$$f(x+\pi)=f(x) \quad 及 \quad f(\pi-x)=f(x),$$

对函数

$$f(x)=\sin^{\frac{p-q}{q}} x$$

而言是满足的. 如此得 [参看 2)]

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{\frac{p}{q}} x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{p}{q}-1} x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2q}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2q}\right)}.$$

由这几个例子读者已可明白, Γ 函数的引入使得以有限形式用已知函数表出积分的可能性增大了多少. 有时即使最后结果不含 Γ 函数也因利用了这种函数的性质而使结果得来容易一些.

313. 关于两个极限运算次序对调的史话 这结尾一段的目的是要将本书各处所讲一切关于两极限运算对调的话作一对比. 所谓 “极限运算” 我们在此理解为对所论函数某自变量的直接的极限过程, 并且也指其他最后归结为这种极限过程的极限运算, 如: 无穷级数求和、函数的微分法、函数在常数限间的积分法 (依正常意义或反常意义) 等.

在 **131** 段已讲到两个累次极限的相等:

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y). \tag{15}$$

我们已看到, 这样的等式不是总成立的, 并且建立了一些保证其成立的条件. 在 **147** 段里对两个混合导数的相等也有类似的情形:

$$D_y D_x f(x,y) = D_x D_y f(x,y). \tag{16}$$

第十六章 (“函数序列及函数级数”) 主要讲的就是当前这种问题: 那里讨论了在什么条件之下无穷级数求和运算容许与寻常极限过程对调 [**266**, **268** 段], 与微分法对调 [**270** 段], 与积分法对调 [**269** 段]. 本章内容也正如此. 这次运算之一总指的是积分运算, 而我们在一定条件之下逐一考虑其与别的极限运算对调 [**296**—**298**, **304**—**307** 各段].

远在这里讲的那些运算被理解为 “极限” 运算之前 (这一过程大家知道是 19 世纪初才完成) 两个这种运算的对调已在数学实践中成了牢固的传统. 甚至连奠基者事实上也已这样做: 试回忆牛顿、莱布尼茨及其同时代的人对级数的微分法与积分法以及关于积分依参变量的微分法的 “莱布尼茨法则” 就是如此. 在整个 18 世纪期间的文献中, 我们不断地可看到这种对调, 常常是没有根据的, 有时固然有证明, 但当然也限于当时的严密性水平; 例如欧拉和克莱罗奠立两个微分运算的对调时 (1739 年) 所用的论证就是如此. 我们可以说, 在数学分析史中两个极限运算的对调恒为得出一般结论及个别数学事实的有力武器. 但用得不正当时它就会成为错误与自相矛盾的根源. 两个极限运算不是永远准许对调, 这种思想本身就在分析错误的基础上慢慢成熟起来, 而在 19 世纪中叶成为大家共有的知识. 对这种对调在分析中常见的那些情形的严密基础, 则大约到该世纪之末才奠定.

关于两个极限过程对调的较简单问题自然是很早就搞明白的. 在 18 世纪与 19 世纪之交, 已经有简单的例子指出等式 (15) 可以不成立, 即累次极限有时与取极限次序有关. 在 1815 年柯西的一篇札记里 (发表于 1827 年) 我们可看到这个问题的正确而透彻的叙述.

高斯也与柯西一样知道, 在累次积分中求积分的次序在被积函数不连续时 (例如趋于无穷) 是不能无条件改变的. 但关于两极限运算对调的一般情形还远未搞清楚.

我们在 **281** 段已经有机会提到过柯西这种未成功的尝试: 他甚至想证明连续函数级数之和是连续的, 并且这种级数可以逐项积分. 前者立即被阿贝尔所推翻, 后者则后来引起了切比雪夫的异议. 在此我们再补充一句: 1823 年柯西对可无条件应用含参变量积分微分法的 “莱布尼茨法则” 也同样给了不正确的证明, 虽然此时已经有了该法则不适用的实例. 在 1828 年奥斯特罗格拉茨基已经明白了解, 在被积函数趋于无穷的情形可能不容许积分号下的微分法. 这情形后来还有别人指出过.

在无穷小分析教本中直到19世纪40年代还常常可碰到关于这些问题的不正确结论. 同时强调对这些必须谨慎的例子也增多了. 我们只举一个最早的, 还是傅里叶所指出的:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t} dt$$

[**293** 段, 附注]. 显然,

$$\lim_{a\to\pm 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t} dt \neq \int_0^{+\infty} \lim_{a\to\pm 0} \frac{\sin at}{t} dt = 0,$$

另一方面, 这个积分在积分号下对变量 a 微分则导出这样的结果:

$$\int_0^{+\infty} \cos atdt,$$

它在一切 a 值均无意义 [**283** 段, 6)].

各种极限运算可对调的条件, 渐渐感到其有明确化的必要了. 促进这明确化的是 19 世纪 40 年代末出现的级数一致收敛概念 [**281** 段] 及其接近的积分一致收敛概念. 但这类问题的叙述中所不可少的严密性却还要经过几十年才逐渐建立起来. 例如, 公式 (16) 的最先严密奠基是 1873

年施瓦兹的事情. 在 1892 年比利时科学院还因德拉瓦莱普森[1]的论著给出无穷区间上积分号下微分法与积分法等等的条件而授予了奖金.

[1] C. de la Valleé-Poussin (1866—1962) 是比利时数学家.

第十九章　隐函数 · 函数行列式[①]

§1. 隐函数

314. 一元隐函数概念　设有两个变量 x 和 y, 其值由一个方程式彼此联系起来, 若这方程的一切项都移至左边, 它一般有这样的形式:

$$F(x,y)=0. \tag{1}$$

这里 $F(x,y)$ 是给定在某区域上的一个二元函数. 如果对某区间内每个 x 值恒存在一个或多个 y 值, 与 x 一起满足方程 (1), 则由此确定了一个单值或多值的函数 $y=f(x)$, 能使

$$F(x,f(x))=0 \tag{2}$$

对 x 成恒等式.

例如, 取方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1a}$$

它显然在区间 $[-a,a]$ 内确定 y 为 x 的一个双值函数, 即

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

如果在方程 (1a) 里以这个函数替代 y, 则得一恒等式.

这里我们已找出了 y 的一个很简单的 x 的解析表达式, 并且是一个初等函数, 但这绝不是永远能做到的事情.

---

①第一卷第八章与第九章的续.

一个函数 $y=f(x)$ 如果由未对 y 解出的方程 (1) 所给出, 则称为隐函数; 如果考虑的是 y 对 x 的直接关系, 则它成为显函数. 读者当可明白, 这些名称只对函数 $y=f(x)$ 的表示法而言, 并与函数的本性无关. 严格说来, 函数表示法的隐式与显式之分只有显式被理解为显的解析表达式时才具有完全明确的意义; 如果以任何法则 [**17** 段] 来表出的函数都认作显函数, 则 x 的函数 y 用方程 (1) 的表示法也并不劣于任何别的表示法.

在最简单的情形, 当 (1) 是代数方程时, 即 $F(x,y)$ 为 x 与 y 的多项式时, 则它确定的 x 的隐函数 y (一般是多值的) 称为代数函数. 如方程次数 (对 y 而言) 不高于 4, 则代数函数能以根式表示为显式, 次数高于 4 时则这种表达式只在例外情形才可能.

现在我们感兴趣的只在 "隐" 函数的**存在**问题及**单值**问题 (以及它的其他性质) 而不论它能否用分析公式表示为 "显" 式与否. 但是, 这问题对我们并不新鲜; 其特例我们在谈反函数存在及性质时已碰到过, 并且曾以方程

$$y-f(x)=0$$

将变量 x 确定为 y 的 "隐" 函数.

有教益的是本问题的几何解释. 方程 (1) 在某些条件之下表示一条平面曲线 [例如大家知道方程 (1a) 表示的是一个椭圆 (图 6)]; 而在这情形它就称为该曲线的隐式方程. 问题就在于, 曲线 (1) (或其一部分) 是否能用像 $y=f(x)$ 这样右边带单值函数的寻常方程式表出; 用几何语言来说这就是, 该曲线 (或其一部分) 只与 y 轴的平行线交于一点.

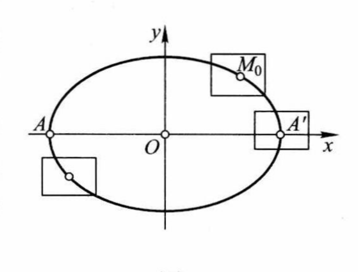


图 6

由此椭圆的例子可见, 如果我们要有单值的函数, 则不但 x 的变域要有限制, y 的变域也要有所限制.

如果在区间 (a,b) 内的每点上方程 (1) 有一个, 并且也只一个在区间 (c,d) 内的根 $y=f(x)$, 则我们为简单起见就说, 方程 (1) 在矩形 $(a,b;c,d)$ 内将 y **确定**为 x 的**单值函数** $y=f(x)$.

我们要牢记, 在所说条件之下, 方程

$$F(x,y)=0 \quad 和 \quad y=f(x)$$

在**矩形** $(a,b;c,d)$ 内完全**等价**, 即为这个矩形内的点所满足.

寻常我们感兴趣的是满足方程 (1) 的点 $M_0(x_0,y_0)$ 已经确定 (在曲线上) 而所说的矩形就是这个点的一个邻域. 例如, 在椭圆 (图 6) 的情形, 显然可以肯定, 方程 (1a) 在椭圆的任何一点的一个充分小的邻域内都将纵坐标 y 确定为横坐标 x 的单值函数, 只有长轴两端点 A, A' 是例外.

315. 隐函数的存在及性质 现在我们来指出一些关于已知函数 $F(x,y)$ 的简单而易于验证的条件, 它们不仅保证一个单值隐函数 $y=f(x)$ 的存在, 并且也保证这函数有连续性及可微分性.

定理 1 设 1) 函数 $F(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义并且连续, 其偏导函数 F'_x 及 F'_y 也连续;

2) $F(x,y)$ 在这一点上等于 $0: F(x_0,y_0)=0$, 但

3) 导函数 $F'_y(x,y)$ 在这一点上异于 0: $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

于是:

a) 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域

$$\mathscr{D}_0=(x_0-\delta,x_0+\delta;y_0-\delta',y_0+\delta')$$

内方程 (1) 把 y 确定为 x 的一个单值函数: $y=f(x)$;

b) 在 $x=x_0$ 时这个函数取这个值 $y_0: f(x_0)=y_0$;

c) 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内函数 $f(x)$ 连续并且

d) 它在这区间内有连续的导函数.

证明 a) 设, 比如说, $F'_y(x_0,y_0)>0$. 按假设 1) 导函数 F'_y 是连续的, 所以这导函数在点 (x_0,y_0) 充分小的邻域内①是正的:

$$F'_y(x,y)>0.$$

我们取一个闭矩形

$$\mathscr{D}=[x_0-\delta',x_0+\delta';y_0-\delta',y_0+\delta'],$$

完全落在该邻域内, 如此上面那不等式在其所有点上都成立.

由此立即推知, 在区间 $[x_0-\delta',x_0+\delta']$ 内任何常数 x 之下 $F(x,y)$ 对 y 而言是单调增函数 [**111** 段].

我们先令沿通过点 $M_0(x_0,y_0)$ 的铅垂线而移动 (图 7), 即固定 $x=x_0$; 于是所论函数 $F(x,y)$ 成为一个变量 y 的函数 $F(x_0,y)$. 由 2) 它在 $y=y_0$ 时等于 0. 同时我们刚才证明了函数 $F(x_0,y)$ 随 y 而递增, 如此对 $y<y_0$ 其值将小于 0, 而对 $y>y_0$ 其值将大于 0. 所以, 在特例, 它于点 $A_0(x_0,y_0-\delta')$ 及 $B_0(x_0,y_0+\delta')$ 将有正负号不同的值, 即

$$F(A_0)=F(x_0,y_0-\delta')<0,\quad F(B_0)=F(x_0,y_0+\delta')>0.$$

①例如, 在满足这不等式的邻域内:

$$|F'_y(x,y)-F'_y(x_0,y_0)|<F'_y(x_0,y_0).$$

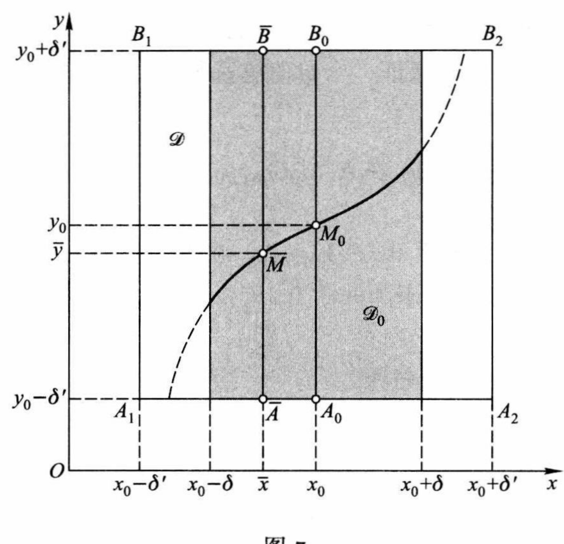


图 7

现在我们来看通过这 A_0 及 B_0 两点的水平线, 即这次我们固定 $y = y_0 - \delta'$ 或 $y = y_0 + \delta'$. 如此对 x 而言得到两个一元函数: $F(x, y_0 - \delta')$ 及 $F(x, y_0 + \delta')$, 在 $x = x_0$ 时第一个函数有负值而第二个函数有正值. 但按条件 1) 这两个函数是连续的①, 因此可以找到点 x_0 的一个邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(0 < \delta \leqslant \delta')$, 在这里面两个函数保持其正负号②, 如此, 在 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ 时

$$F(x, y_0 - \delta') < 0, \quad F(x, y_0 + \delta') > 0.$$

换句话说, 沿着矩形下底及上底 A_1A_2 及 B_1B_2 上各以 A_0 及 B_0 为中心而长 2δ 的线段, 所给函数 $F(x, y)$ 各有负值及正值.

我们在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内指定任意一个值 $x = \bar{x}$ 并且来考虑一条联结点 $\bar{A}(\bar{x}, y_0 - \delta')$ 和 $\bar{B}(\bar{x}, y_0 + \delta')$ 的铅垂线. 沿此线我们的函数又成为一个变量 y 的函数 $F(\bar{x}, y)$. 因为它是连续的③, 并且依照刚才说的, 在区间 $[y_0 - \delta', y_0 + \delta']$ 两端有不同的正负号:

$$F(\bar{A}) = F(\bar{x}, y_0 - \delta') < 0, \quad F(\bar{B}) = F(\bar{x}, y_0 + \delta') > 0,$$

则按波尔查诺 – 柯西定理 [**68** 段] 在某一介于 $y_0 - \delta'$ 与 $y_0 + \delta'$ 间的值 $y = \bar{y}$ 上这个函数 $F(\bar{x}, y)$ 等于 0:

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

这里仍由函数 $F(\bar{x}, y)$ 的单调性推知在 $y \gtrless \bar{y}$ 时将相应地有 $F(\bar{x}, y) \gtrless 0$, 如此 $\bar{y}$ 是

①我们假设了函数 $F(x, y)$ 对变量 x, y 总起来连续; 但这时它对每一变量分别也连续.

②这可由 **37** 段, 2) 推知. 参看本段第一个脚注.

③参考脚注 ①.

区间 $(y_0-\delta', y_0+\delta')$ 内唯一的一个能与 $x=\bar{x}$ 一起满足方程 (1) 的 y 值. 在每一铅垂线段 $\bar{A}\bar{B}$ 上都可找到唯一的一点 $\bar{M}(\bar{x},\bar{y})$ 使该方程左边等于 0.

如此, 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的邻域

$$\mathscr{D}_0=(x_0-\delta, x_0+\delta; y_0-\delta', y_0+\delta')$$

里方程 (1) 事实上将 y 确定为 x 的一个单值函数 $y=f(x)$.

b) 由 2) 前面的论证同时也就证明了 $f(x_0)=y_0$. 事实上, 由 $F(x_0,y_0)=0$, 我们看出 y_0 就是区间 $(y_0-\delta', y_0+\delta')$ 内那一个能与 $x=x_0$ 一起满足方程 (1) 的唯一的 y 值.

c) 现在来证明 c) 及 d), 我们将 y 理解为就是那个由方程 (1) 所确定并且恒等地满足该方程的隐函数 $y=f(x)$. 给 x 以增量 Δx; 增大后的值 $x+\Delta x$ 将相应于函数值 $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$, 二者一起满足方程 (1): $F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$. 显然, 增量

$$\Delta F(x,y)=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=0.$$

现在利用有限增量公式来变换这个等式如下 [**102** 段]:

$$\begin{aligned}0&=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)\\&=[F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y+\Delta y)]+[F(x, y+\Delta y)-F(x,y)]\\&=F'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\cdot\Delta x+F'_y(x, y+\theta_1\Delta y)\cdot\Delta y\quad(0<\theta,\theta_1<1),\end{aligned}$$

由此有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)}{F'_y(x, y+\theta_1\Delta y)}.\tag{3}$$

首先来证明, $\Delta x\to 0$ 时则也有 $\Delta y\to 0$, 即函数 $y=f(x)$ 连续. 我们有

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|=\frac{|F'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)|}{F'_y(x, y+\theta_1\Delta y)}.$$

但在 $\mathscr{D}$ 内连续的函数 $|F'_x|$ 有有限的上界 M [**137** 段]

$$|F'_x|\leqslant M,$$

同时正连续函数 F'_y 在 $\mathscr{D}$ 内有最小值 m [**137** 段], m 也是正的, 因此就是 F'_y 的一个下界:

$$F'_y\geqslant m>0.$$

现在不难得出估计式:

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|\leqslant\frac{M}{m}$$

或

$$|\Delta y|\leqslant\frac{M}{m}|\Delta x|,$$

由此推出所要证明的结论.

d) 再看等式 (3), 现在假设 $\Delta x \to 0$. 因为我们已经知道, 此时有 $\Delta y \to 0$, 故由函数 F'_x 和 F'_y 的连续性并考虑到 $F'_y \neq 0$ 得右边的极限

$$-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

这也就是等式 (3) 左边的极限, 如此存在 y 对 x 的导函数:

$$f'(x) = y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \tag{4}$$

在此以 $f(x)$ 代 y, 得

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))};$$

因为分子分母都是连续函数的连续函数并且分母不等于 0, 由此明白 $f'(x)$ 也是连续函数. 至此本定理完全证明.

如此, 由直接给出的函数 $F(x,y)$ 的性质我们能判断没有直接给出的函数 $y = f(x)$ 的函数的性质!

我们已经在 **314** 段讲过这里所讨论的问题的几何解释. 如果曲线是由隐式方程 (1) 给出的, 并且在其某一点上 $F'_y \neq 0$, 则在此点邻近该曲线可以用这样的显式方程表出: $y = f(x)$. 当然, x 与 y 可以调换地位: 如果在某点 $F'_x \neq 0$, 则在其邻近该曲线可用另一种显式方程表示为: $x = g(y)$. 只在同时 $F'_x = 0$ 且 $F'_y = 0$ 的 "奇点" 上 [**210** 段] 我们的定理才没有用处.

316. 多元隐函数 与方程 (1) 相似, 也可考虑变量较多的方程. 例如, 设我们有一个三元方程:

$$F(x,y,z) = 0. \tag{5}$$

在一定条件下, 这个方程将 z 确定为两个变量 x 和 y 的 "隐" 函数:

$$z = h(x,y),$$

它一般说来是多值的. 如果以它代 z, 则有

$$F(x,y,h(x,y)) = 0, \tag{6}$$

这已经是对 x, y 的恒等式.

如果对矩形

$$(a,b;c,d)$$

内任何一点 (x,y) 方程 (5) 在区间 (e,f) 内有一个且只有一个根 $z = h(x,y)$, 则我们说方程 (5) 在长方体

$$(a,b;c,d;e,f)$$

内把 z 确定为 x 和 y 的单值函数.

在这情形之下, 方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad 与 \quad z = h(x, y)$$

在长方体 $(a, b; c, d; e, f)$ 内就完全等价.

这种长方体通常就是所考虑的点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的邻域.

现在陈述一个关于方程 (5) 的定理.

定理 2 我们假设

1) 函数 $F(x, y, z)$ 连同其偏导函数都在某一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的邻近有定义并且连续;

2) 函数 F 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 等于 0; 并且

3) 导函数 F'_z 在这一点上不等于 0.

于是:

a) 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域

$$\mathscr{E}_0 = (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta'; z_0 - \Delta'', z_0 + \Delta'')$$

内方程 (5) 将 z 确定为 x 和 y 的单值函数 $z = h(x, y)$;

b) 在 $x = x_0, y = y_0$ 时 $h(x_0, y_0) = z_0$;

c) 函数 $h(x, y)$ 对其自变量总起来连续并且

d) 它有连续的偏导函数 h'_x, h'_y.

证明完全与定理 1 相似, 故从略.

这次方程 (5) 的几何形象是曲面. 在 $F'_z \neq 0$ 的条件下在相应点邻近这曲面可表示为显式方程 $z = h(x, y)$ 的形式. 如果在某一点上同时有 $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ 则本定理不能应用 —— 这时该点是 "奇点" [**213** 段].

317. 由方程组确定的隐函数 最后, 在最一般的情形, 可以给出一组带有 $n+m$ 个变量的 m 个方程:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m) &= 0, \\ F_2(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m) &= 0, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ F_m(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

这里要讨论的是由这组方程将 m 个变量 $y_1, \cdots, y_m$ 确定为 n 个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数:

$$y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_m = f_m(x_1, \cdots, x_n),$$

而代入 (5) 可得一组对 $x_1, \cdots, x_n$ 的恒等式.

我们来讨论一个最简单的情形 —— 三元二式联立方程组:

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

如果在对区间 (a,b) 内每个 x 值方程组 (8) 在矩形 $(c,d;e,f)$ 内有一组且只有一组解 $(y=f(x),z=g(x))$, 则称这组方程在长方体

$$(a,b;c,d;e,f)$$

内将 y 及 z 确定为 x 的单值函数: $y=f(x),z=g(x)$.

在这些条件下显然方程组 (8) 在**长方体范围内**等价于方程组

$$\left.\begin{aligned} y=f(x),\\ z=g(x). \end{aligned}\right\}$$

我们已看到, 在由一个方程 (1) [或 (5)] 所确定的单值隐函数存在问题中起决定性作用的条件是, 要在某一满足该方程的点上导函数 F'_y [或 F'_z] 不等于 0, 即对所要确定为隐函数的变量的偏导函数要不等于 0. 我们就将讨论的, 由方程组 (8) 所确定的单值隐函数 y,z 存在问题中起类似作用的是一个行列式, 它由方程组 (8) 左边诸函数对所要确定的变量 y 及 z 的四个偏导函数所组成:

$$J=J(x,y,z)=\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}. \tag{9}$$

定理 3 设:

1) 函数 $F(x,y,z)$ 及 $G(x,y,z)$ 连同其所有偏导函数都在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 某邻域内有定义并且连续;

2) 点 P_0 满足方程组 (8):

$$F(x_0,y_0,z_0)=0,\quad G(x_0,y_0,z_0)=0;$$

3) 行列式 $J(x,y,z)$ 在这一点上不等于 $0: J(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

于是:

a) 在点 P_0 某一邻域

$$\mathscr{M}=(x_0-\delta,x_0+\delta;y_0-\delta',y_0+\delta';z_0-\delta'',z_0+\delta'')$$

内方程组 (8) 将 y 及 z 确定为 x 的单值函数: $y=f(x),z=g(x)$;

b) 在 $x=x_0$ 时这些函数各具有值 $y_0,z_0: f(x_0)=y_0,g(x_0)=z_0$;

c) 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 连续; 并且

d) 有连续导函数 $f'(x),g'(x)$.

证明 因为行列式 J 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 不等于 0, 故其第二列至少有一元素在这一点上也不等于 0; 比如说, 设

$$F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

在这情形按定理 2 在点 P_0 某邻域

$$\mathscr{E}_0 = (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta'; z_0 - \Delta'', z_0 + \Delta'')$$

内方程 (8) 的第一式将 z 确定为 x 及 y 的单值函数: $z = h(x, y)$, 它具有该定理结论 b), c), d) 中所列举的性质. 在方程组 (8) 中将第一式用它的等价方程 (在 $\mathscr{E}_0$ 范围内等价) $z = h(x, y)$, 代替得一等价方程组

$$\left.\begin{array}{l} G(x, y, z) = 0, \\ z = h(x, y). \end{array}\right\}$$

最后, 如果在 $\mathscr{E}_0$ 内以 $h(x, y)$ 代 z, 则得一组更简单而仍等价的方程

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(x, y) = 0, \\ z = h(x, y), \end{array}\right\} \tag{10}$$

这里为简单起见令

$$\Phi(x, y) \equiv G(x, y, h(x, y)). \tag{11}$$

如此, 我们把问题化为要证明在点 P_0 的某一 (包含在 $\mathscr{E}_0$ 内的) 邻域 $\mathscr{M}_0$ 内方程组 (10) 将 y 及 z 确定为 x 的单值函数, 且具有一切所要求的性质. 利用方程组 (10) 第一式只含变量 x, y 这一有利情形而将其化为已证明的定理 1: 如果能证明这方程把 y 确定为 x 的单值函数 $y = f(x)$, 则 z 也不难由方程组 (10) 第二式确定为 x 的单值函数:

$$z = h(x, f(x)) = g(x). \tag{12}$$

我们着手来验证对函数 Φ 定理 1 的条件都实现; 首先看出

$$h(x_0, y_0) = z_0 \tag{13}$$

[b), 定理 2], 并且由函数 $h(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的连续性这函数在点 M_0 近处的值可与 z_0 任意接近. 于是在点 M_0 充分小的邻域内函数 $\Phi(x, y)$ 连同其偏导函数都将连续, 因为组成它的函数 $G(x, y, z)$ (在 P_0 近处) 及函数 $h(x, y)$ (在 M_0 近处) 都是如此的 [参看 (11)].

同样, 由 (12), (13) 及本定理假设 2), 定理 1 的条件 2) 也实现:

$$\Phi(x_0, y_0) = G(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) = G(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

剩下只要验证定理 1 的条件 3). 将 (11) 对 y 求导得

$$\Phi'_y(x,y) = G'_y + G'_z \cdot h'_y. \tag{14}$$

但 h'_y 可以就恒等式 (6) 对 y 求导而得

$$F'_y + F'_z \cdot h'_y = 0, \quad \text{由此有 } h'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

将此式代入 (14), 即得结果

$$\Phi'_y(x,y) = G'_y - G'_z \cdot \frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{J}{F'_z},$$

但右边自变量 z 处处应代以 $h(x,y)$. 由 (13), 左边的点 $M_0(x_0,y_0)$ 相应于右边的点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 因为按条件 3) 行列式 J 在点 P_0 异于 0, 故导函数 Φ'_y 在点 M_0 也异于 0.

现在我们已经能应用定理 1 到方程 $\Phi(x,y)=0$ 而肯定在点 M_0 某一邻域

$$(x_0-\delta, x_0+\delta; y_0-\delta', y_0+\delta')$$

$(0<\delta<\Delta, 0<\delta'<\Delta')$ 内这个方程的确将 y 确定为 x 的单值函数 $y=f(x)$, 于是 (如上面已指出过) 公式 (12) 也将 z 确定为 x 的单值函数.

作为 a) 中所说的邻域 $\mathscr{M}_0$, 可以取长方体

$$(x_0-\delta, x_0+\delta; y_0-\delta', y_0+\delta'; z_0-\delta'', z_0+\delta''),$$

并令 $\delta''=\Delta''$. 本定理的结论 b), c) 及 d) 可由定理 1 和 2 中所陈述的函数 $f(x)$ 及 $h(x,y)$ 的性质来证实.

这里定理也可给以几何的解释. 方程组 (8) 一般说来表示一条空间曲线 —— 即两曲面之交线, 每一曲面各由一个方程表出. 如果在某点上有偏导函数矩阵

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{pmatrix}$$

的某一个二阶行列式, 比如说, 行列式 (9) 异于 0, 则在所考虑的点的邻域内有两个坐标 (在当前情形是 y 和 z) 可以看作是第三个 (x) 的函数, 即该曲线可用显式方程 $y=f(x), z=g(x)$ 表出. 这个定理只在 “奇点” 上不能应用, 此时矩阵的三个行列式同时全等于 0.

对方程组 (7) 的一般形式也可用数学归纳法证明类似的定理. 归纳法是依方程个数进行的, 就像刚才把两个方程的情形化归为一个方程的情形一样. 这个一般定理

我们不来陈述和证明了. 要注意的只是, 在方程组 (7) 所确定的隐函数组 $y_1, \cdots, y_m$, 存在问题中起决定性作用的是行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

应该在给定的点 (其邻域是我们所考虑的) 上异于 0.

附注 读者要注意所有隐函数存在定理的局限性总是对一点的某一邻域而言. 但即使在这种形式下这些定理也已很有用处了; 例如, 研究几何形象在其上一给定点处的性质时只要限于其紧邻就完全够了.

318. 隐函数导数的计算 在建立隐函数存在定理的论证过程并不一定对隐函数 (一阶) 导数的计算法有所指示. 关于高阶导数更完全谈不到. 现在我们来专讲这个重要问题.

我们由方程 (1) 已给出时的最简单情形开始. 设在所考虑的点的邻域内定理 1 的条件已实现; 以后起重要作用的是 $F'_y \neq 0$ 这个条件.

因为 x 的隐函数 y 本身及其导函数 y'_x 的存在预先已经知道, 则这个导函数的计算手续可以由等式 (1)

$$F(x, y) = 0$$

对 x 的求导来实现, 这等式如果将 y 理解为就是由此所定的隐函数, 则化为恒等式. 我们得到 [如 **141** 段, 4) 已有]

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y'_x = 0, \tag{15}$$

由此重新得出已知的公式 (4)

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

现在我们可以继续下去. 如果函数 $F(x, y)$ 有二阶连续导数, 则公式 (4) 右边的式子可以依 x 微分, 因此也存在 y'_x 的导数, 即隐函数 y 的二阶导数 y''_x. 进行微分并每次将 y'_x 代以其表达式 (4), 如此得出:

$$\begin{aligned} y''_{x^2} &= \frac{(F''_{xy} + F''_{y^2} \cdot y'_x) \cdot F'_x - (F''_{x^2} + F''_{xy} \cdot y'_x) \cdot F'_y}{F'^2_y} \\ &= \frac{2F'_x \cdot F'_y \cdot F''_{xy} - F'^2_y \cdot F''_{x^2} - F'^2_x \cdot F''_{y^2}}{F'^3_y}; \end{aligned}$$

由此可见, 二阶导函数是 x 的连续函数.

如果函数 $F(x, y)$ 有三阶的连续导函数, 则显然也存在隐函数的三阶导函数 y'''_{x^3}; 其表达式又可以由 y''_{x^2} 的式子直接微分得出, 如此类推. 不难用数学归纳法证明, 函数 $F(x, y)$ 如果有直达 k 阶为止的连续导函数 $(k > 1)$ 则可保证隐函数也有同样各阶的连续导函数.

在证明了隐函数相继各阶导函数的存在以后, 它们的计算可以用较简单的办法进行, 只要把 y 看作 x 的函数而逐次求导恒等式 (15) 就行了. 例如, 由这个恒等式第一次求导得

$$F''_{x^2}+F''_{xy}\cdot y'_x+(F''_{xy}+F''_{y^2}\cdot y'_x)\cdot y'_x+F'_y\cdot y''_{x^2}=0,$$

由此有 (注意 $F'_y\neq 0$)

$$y''_{x^2}=-\frac{F''_{x^2}+2F''_{xy}\cdot y'_x+F''_{y2}\cdot y'^2_x}{F'_y};$$

将 y'_x 代之以其表达式 (4) 即得已经求出的 y''_{x^2} 的表达式; 其余类推.

例 1) 设 y 与 x 由下面的方程式

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$$

联系着. 逐次依 x 求导 (y 看作 x 的函数), 首先得

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2}\quad\text{或}\quad x+yy'=xy'-y;$$

然后得

$$1+y'^2+yy''=xy'',\cdots.$$

由第一个方程算出

$$y'=\frac{x+y}{x-y},$$

由第二个方程算出 (如以所求得 y' 值代入)

$$y''=\frac{1+y'^2}{x-y}=2\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3},$$

如此类推.

方程 (5)

$$F(x,y,z)=0$$

的情形也相似. 这里我们假设定理 2 的条件已实现. 如果 z 理解为由这个方程所定的隐函数, 则此方程成恒等式, 可依 x 求导, 也可依 y 求导. 结果得

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

(第二等式我们本来已在定理 3 证明中以同样方法得出.)

如果函数 F 有二、三、$\cdots\cdots$ 阶的连续导函数, 则函数 z 也有这样的导函数: 这全与上面所说关于方程 (1) 的情形讲过的一样.

如果需要所有一、二、三、$\cdots\cdots$ 各阶的导数, 则比较简单的是一下子算出 $dz,d^2z,\cdots$. 对我们的恒等式两边求全微分, 即令其左边的全微分等于 0 (在此利用 **143** 段一阶微分形式的不变性):

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

如此

$$dz = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dx - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dy.$$

同时

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

既然 dx 和 dy 是任意的, 故显然有①

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

和以前所得一样.

再微分一次, 得

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dy + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}dz\right]dx + \cdots + \frac{\partial F}{\partial z}d^2 z = 0,$$

然后决定 $d^2 z$. 这导出

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

的表达式, 其余如此类推. 我们可看到, 在所有这些计算中条件

$$F'_z = \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$$

起基本作用.

2) 设 x, y 的隐函数 z 由下面方程所决定:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

我们相继有

$$\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} + \frac{zdz}{c^2} = 0, \quad dz = -\frac{c^2 x}{a^2 z}dx - \frac{c^2 y}{b^2 z}dy,$$

如此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}.$$

然后有

$$\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} + \frac{zd^2 z}{c^2} = 0,$$

由此得 (如利用 dz 的已知表达式)

$$d^2 z = -\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2 b^2}dxdy + \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right],$$

①等式 $Adx + Bdy = A'dx + B'dy$ 在 dx 和 dy 的值任意时只能当 $A = A'$ 并且 $B = B'$ 时才能成立.

这就给出

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^4}{a^2z^3}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c^4}{b^2z^3}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right),$$

如此等等.

现在来看方程组 (8):

$$\left.\begin{aligned}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{aligned}\right\}$$

我们假设, 在所取的点邻近定理 3 的条件满足. 还是要注意条件 $J\neq 0$ 所起的作用.

我们知道, x 的隐函数 y 和 z 有对 x 的导函数. 它们可这样计算: 将 y 和 z 理解为所说的隐函数, 因而由 (8) 得出一恒等式. 将此恒等式对 x 求导得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=0,$$
$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial G}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=0.$$

这是一组关于未知数 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{dz}{dx}$ 的线性方程, 其行列式 J 异于 0. 两个对 x 的导函数不难由此决定.

我们不在此重复关于利用全微分及关于高阶导数存在和计算的附注.

以上说的全都可以推广到一般的情形.

3) 设给了一组方程

$$x+y+z+u=a,\quad x^2+y^2+z^2+u^2=b^2,\quad x^3+y^3+z^3+u^3=c^3,$$

将 y,z,u 确定为 x 的函数. 我们有

$$1+y'+z'+u'=0,\quad x+yy'+zz'+uu'=0,$$
$$x^2+y^2y'+z^2z'+u^2u'=0.$$

设行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\y&z&u\\y^2&z^2&u^2\end{vmatrix}=(z-y)(u-y)(u-z)$$

不等于 0, 由此有

$$y'=-\frac{(z-x)(u-x)}{(z-y)(u-y)},$$

如此等等.

§2. 隐函数理论的一些应用

319. 相对极值 我们来讨论 $n+m$ 元函数 $f(x_1, \cdots, x_{n+m})$ 的极值问题. 假设这 $n+m$ 个变量间还有 m 个 "约束方程"

$$\Phi_i(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

我们来明确一下这种相对极值的概念并且指出其求法.

如果对满足约束方程的点 $P_0(x_1^0, \cdots, x_{n+m}^0)$ 某邻域内所有**满足该方程**的点 $(x_1, \cdots, x_{n+m})$, 不等式

$$f(x_1, \cdots, x_{n+m}) \leqslant f(x_1^0, \cdots, x_{n+m}^0)$$
$$(\geqslant)$$

都成立, 则称函数 $f(x_1, \cdots, x_{n+m})$ 在点 $P_0(x_1^0, \cdots, x_{n+m}^0)$ 上有一相对极大值 (极小值).

例如, 如果所谈的是函数 $u = f(x, y, z)$, 其三个变量间还有一约束方程

$$F(x, y, z) = 0,$$

则求函数 u 的相对极值其几何意义就是要在上式所表示的曲面上找极值: 极值点本身及与它对比的点都应落在这个曲面上. 如果有两个约束方程

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0,$$

则显然问题就是要在这些方程所表示的曲线上来考虑了.

现在来详细叙述这个问题, 而为写起来简单起见只限于四元函数

$$u = f(x, y, z, t),$$

其各变量间有两个约束方程

$$F(x, y, z, t) = 0, \quad G(x, y, z, t) = 0. \tag{1}$$

设函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ 有一相对极值. 我们假设函数 f 以及 F 和 G 在该点邻近对所有自变量都有连续偏导函数. 其次, 设偏导数矩阵

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z & F'_t \\ G'_x & G'_y & G'_z & G'_t \end{pmatrix}$$

中至少有一个二阶行列式在点 P_0 上不等于 0①, 比如说, 这是行列式

$$J = \begin{vmatrix} F'_z & F'_t \\ G'_z & G'_t \end{vmatrix}. \tag{2}$$

①在这情形我们说该矩阵 (在点 P_0) 为有秩 2.

于是, 如果限于点 P_0 的适当邻域内 (依据一个与 **317** 段的定理 3 相似的定理), 方程组 (1) 就等价于形如

$$z = \varphi(x, y), \quad t = \psi(x, y) \tag{3}$$

的一组方程, 这里 φ, ψ 是 (1) 所确定的隐函数. 换句话说, 要变量 x, y, z, t 的值满足约束方程 (1) 这一条件可代之以假设变量 z 和 t 是 x 和 y 的函数 (3). 如此, 四元函数 $f(x, y, z, t)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ 的相对极值问题就变成了二元复合函数

$$f(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) \tag{4}$$

在点 $M_0(x_0, y_0)$ 上的寻常 (绝对) 极值问题.

这种想法也指示我们找函数 $f(x, y, z, t)$ 达到相对极值的点的实际途径: 如果我们实际上会解出约束方程比如说对变量 z 和 t 并且会找函数 (3) 的显式; 则问题就化为要找复合函数 (4) 的绝对极值. 其实, 我们在一系列早先所解的问题中 [**153**, **154** 段] 正是这样做的, 例如, 在 $x + y + z + t = 4c$ 条件下找乘积 $xyzt$ 的最大值, 等等.

现在我们指出另一途径来找点 $P_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$, 而不假设我们有 (隐) 函数 (3) 的显式, 虽然这些函数的存在我们在此也要用到.

如此, 设在点 P_0 函数 $f(x, y, z, t)$ 有一相对极值, 或者说, 复合函数 (4) 在点 M_0 有一绝对极值.

于是在这一点上函数 (4) 的对 x 及对 y 的导数都等于 0, 所以其微分也等于 0. 按 **143** 段的一阶微分形式不变性这个条件也可写成这样:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0, \tag{5}$$

这里 dz 和 dt 可理解为函数 (3) 在点 M_0 的微分, 而各偏导数则在点 P_0 计算, 因为

$$\varphi(x_0, y_0) = z_0, \quad \psi(x_0, y_0) = t_0. \tag{6}$$

当然不能由 (5) 断定微分的系数等于 0, 因为这些微分不全是任意的. 为了将问题化为任意选取的微分, 即自变量的微分 dx 及 dy, 我们设法由此消去因变量的微分 dz 及 dt. 这不难做到, 只要把约束方程 (1) 两边取全微分, 而将 z 和 t 理解为函数 (3)[①]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0,\\ \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz + \frac{\partial G}{\partial t}dt = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

这里, 也和上面一样, 由 (6), 偏导数在点 P_0 计算. 因为按假设行列式 (2) 在这一点上不等于 0, 故 dz 及 dt 可由此表示为 dx 和 dy 的一次式. 如果将这些表达式代入

① 说精确点, 我们要微分那些恒等式, 它们由方程 (1) 将其中 z 及 t 代之以隐函数 (3) 而得出. 以后我们将一律采用这样类似的说法.

(5), 则得形如

$$Adx + Bdy = 0$$

的等式, 其中 A 和 B 表示对函数 F, G 的偏导数的有理式, 并且这偏导数是取在点 P_0 上的. 因为在这等式上只出现自变量的微分 dx, dy, 即完全任意的数, 故在点 M_0 我们有

$$A = 0, \quad B = 0.$$

连同约束方程我们共有四个方程来决定未知数 x, y, z, t.

当然, 我们只建立了点 $P(x_0, y_0, z_0, t_0)$ 的极值的必要条件. 但即使这样的条件甚至也可用来找函数 f 在条件 (1) 之下的最大 (或最小) 值, 只要按问题的性质能预知在所考虑的区域内部应有达到最大值或最小值的点存在, 或者在推论的过程中先作这样的假设, 以后再将所求出的点用其他办法来证实.

实例见下面 **321** 段.

320. 拉格朗日不定乘数法 在上面所讲的方法里, 变量之间不成对称: 有些当作自变量, 有些当作因变量; 有些微分被消去, 而有些保留. 这有时会使计算大为复杂化. 拉格朗日提出一种方法, 使所有变量都保持平等的地位.

将等式 (7) 各乘以暂时任意的 (非负) 乘数 λ, μ 而将结果逐项与 (5) 相加, 如此得等式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial F}{\partial x} + \mu\frac{\partial G}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial F}{\partial y} + \mu\frac{\partial G}{\partial y}\right)dy$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial F}{\partial z} + \mu\frac{\partial G}{\partial z}\right)dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \lambda\frac{\partial F}{\partial t} + \mu\frac{\partial G}{\partial t}\right)dt = 0, \tag{8}$$

这里 dz 及 dt 仍旧表示隐函数 (3) 的微分 (在推导中我们暂时保持变量的不平等); 导数都在点 P_0 上计算.

现在我们这样选取 λ 和 μ 的值, 使因变量的微分 dz 和 dt 的系数等于 0:

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial F}{\partial z} + \mu\frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda\frac{\partial F}{\partial t} + \mu\frac{\partial G}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

这是做得到的, 因为用以决定 λ 和 μ 的线性方程组 (2) 的行列式不等于 0. 在所选取的乘数值之下等式 (8) 就成这样的形状:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial F}{\partial x} + \mu\frac{\partial G}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial F}{\partial y} + \mu\frac{\partial G}{\partial y}\right)dy = 0. \tag{10}$$

这里我们又只有自变量的微分了, 所以它们的系数应该等于 0, 即与 (9) 式并列我们还有

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial F}{\partial x} + \mu\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial F}{\partial y} + \mu\frac{\partial G}{\partial y} = 0. \tag{9*}$$

如此, 为了决定四个未知数 x, y, z, t 以及两个乘数 λ 和 μ 我们恰好有一样多的方程, 即两个约束方程及四个方程 (9) 和 (9*).

为了使这些方程写起来方便一点, 通常采用一个辅助函数

$$\Phi = f + \lambda F + \mu G;$$

于是所说的方程可以写成这样:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \tag{11}$$

它们看起来像是函数 F 的寻常极值条件. 但这只能看作是一种便于记忆的方法.

拉格朗日方法也只能导出必要条件. 在此还可重述一下前段末尾所说的话.

附注 在所讲理论中关于偏导数矩阵的秩的假定起了重要作用, 我们已三度用到了. 在用上述方法之一来解决问题时, 为了证实使函数达到相对极值的点一个都没有遗漏, 应预先确定这个假定, 在所考虑区域内所有满足约束方程的点上都已实现. 在简单情形这让读者去做.

我们来看几个例题.

321. 例及习题 1) 设要找函数 $u = xyzt$ 在条件 $x + y + z + t = 4c$ 下的极值; 变量的变域由不等式 $x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, t \geqslant 0$ 所定. 这个问题, 我们在 **153** 段, 2) 里已利用由后一条件实际表出 t 而解决了.

应用拉格朗日方法于同一问题而引入辅助函数

$$\Phi = xyzt + \lambda(x + y + z + t)^{①}$$

并且列出条件

$$\Phi'_x = yzt + \lambda = 0, \cdots, \Phi'_t = xyz + \lambda = 0,$$

由此得

$$yzt = xzt = xyt = xyz, \quad \text{如此} \quad x = y = z = t = c.$$

2) 回到那并联电路中导线最经济截面问题 [**154** 段, 3)]. 仍采用该处的记号, 我们来找函数

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_n) = l_1 q_1 + l_2 q_2 + \cdots + l_n q_n$$

在条件

$$F(q_1, q_2, \cdots, q_n) = \frac{\rho l_1 J_1}{q_1} + \frac{\rho l_2 J_2}{q_2} + \cdots + \frac{\rho l_n J_n}{q_n} = e$$

下的极值; 在此我们不必像以前那样引入别的变量来替换 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 了, 因为用我们的新方法问题可以很简单地解决.

如此, 将方程 $F = 0$ 两边取全微分, 然后得出下面这个 dq_n 的表达式:

$$dq_n = -\frac{q_n^2}{l_n J_n}\left\{\frac{l_1 J_1}{q_1^2} dq_1 + \cdots + \frac{l_{n-1} J_{n-1}}{q_{n-1}^2} dq_{n-1}\right\}.$$

① 如果记得这个函数的作用, 则可明白这里 Φ 中常数项无妨省略.

代入等式 $df = l_1dq_1 + l_2dq_2 + \cdots + l_{n-1}dq_{n-1} + l_ndq_n = 0$ 得出这结果:

$$\left(l_1 - \frac{q_n^2}{J_n} \cdot \frac{l_1 J_1}{q_1^2}\right) dq_1 + \cdots + \left(l_{n-1} - \frac{q_n^2}{J_n} \cdot \frac{l_{n-1}J_{n-1}}{q_{n-1}^2}\right) dq_{n-1} = 0.$$

因为 $dq_1, \cdots, dq_{n-1}$ 已经是任意的, 则它们各自的系数都等于 0. 由此得

$$\frac{q_1^2}{J_1} = \frac{q_2^2}{J_2} = \cdots = \frac{q_{n-1}^2}{J_{n-1}} = \frac{q_n^2}{J_n} = \lambda^2,$$

并且

$$q_1 = \lambda\sqrt{J_1}, \quad q_2 = \lambda\sqrt{J_2}, \quad \cdots, \quad q_n = \lambda\sqrt{J_n}. \tag{12}$$

比例乘数 λ 不难由约束方程决定:

$$\lambda = \frac{\rho}{e} \cdot \sum_{i=1}^{n} l_i\sqrt{J_i}.$$

如果应用拉格朗日方法, 则须作辅助函数[①]

$$\Phi(q_1, q_2, \cdots, q_n) = l_1q_1 + \cdots + l_nq_n + \lambda^2 \left(\frac{l_1J_1}{q_1} + \cdots + \frac{l_nJ_n}{q_n}\right)$$

并令其导数等于 0:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q_1} = l_1 - \frac{\lambda^2 l_1 J_1}{q_1^2} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial q_n} = l_n - \frac{\lambda^2 l_n J_n}{q_n^2} = 0,$$

由此重新得出 (12), 如此等等.

3) 作为一个较复杂的例子我们来考虑这个问题: 三轴椭圆面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a > b > c)$ 被一个通过其中心的平面 $lx + my + nz = 0$ 所截; 要确定所得椭圆截口的半轴. 换句话说, 要来找函数 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 的极值, 这里诸变量间有上面那两个关系方程.

消去因变量的微分的方法 [**319** 段] 在此会引起复杂的计算; 所以我们即运用拉格朗日方法.

为了证实矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

的秩在椭圆面与平面的所有交点上都等于 2[②], 我们用反证法. 设二阶行列式全等于 0, 因此上下两行元素将成比例; 但这样等式 $lx + my + nz = 0$ 势必导出 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 这是不可能的.

作辅助函数

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) + 2\mu(lx + my + nz),$$

令其导数等于 0:

$$x + \lambda\frac{x}{a^2} + \mu l = 0, \quad y + \lambda\frac{y}{b^2} + \mu m = 0, \quad z + \lambda\frac{z}{c^2} + \mu n = 0. \tag{13}$$

将这些方程分别乘以 x, y, z 而加起来, 得 (考虑到约束方程) $\lambda = -r^2$.

---

① "不定乘数" 我们为方便计取成 λ^2 形式, 常数 ρ 包含在内.

② 参看 **320** 段附注.

如果为确定起见设 l, m, n 没有等于 0 的, 则由 (13) 可看出 r 不等于 a 或 b 或 c. 于是方程 (13) 可写成这样:

$$x = -\mu \frac{la^2}{a^2 - r^2}, \quad y = -\mu \frac{mb^2}{b^2 - r^2}, \quad z = -\mu \frac{nc^2}{c^2 - r^2}.$$

由此不难找出 μ 并从而得出 x, y, z; 但也可以避免这样做, 而把这些等式预先分别乘以 l, m, n 然后加起来, 如此得出方程

$$\frac{l^2 a^2}{a^2 - r^2} + \frac{m^2 b^2}{b^2 - r^2} + \frac{n^2 c^2}{c^2 - r^2} = 0,$$

由此可直接定出两个我们所要的 r^2 的极值.

因为这些极值的存在是预先知道的, 如此本问题完全解决了.

322. 函数独立性概念 我们来考虑一组函数

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

在某 n 维开区域 $\mathscr{D}$ 内连同其偏导函数都有定义并且连续. 可能其中有一个, 例如 y_j, 是其余的函数①:

$$y_j = \Phi(y_1, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \cdots, y_m)^{①}, \tag{15}$$

这里 Φ 也假设在一个 $(m-1)$ 维区域 $\mathscr{E}$ 内是所有自变量的连续函数并有连续偏导函数; 该区域则包含当 n 维点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 遍历区域 $\mathscr{D}$ 时这些函数所取的一切可能值组 $y_1, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \cdots, y_m$. 此时我们理解等式 (15) 在区域 $\mathscr{D}$ 内对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 恒等地成立. 于是称在这区域内函数 y_j 依赖于其余函数. 特别地, 如果 y_j 是常数时也称其为如此; 在这情形可令 $\Phi =$ 常数.

一般地说, 函数 $y_1, y_2, \cdots, y_m$, 如果有一个 (随便哪个都一样) 依赖其余, 则称为在区域 $\mathscr{D}$ 内相依.

如果在区域 $\mathscr{D}$ 内或其任何部分内像 (15) 那样的恒等式都不成立, 则函数 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 称为在区域 $\mathscr{D}$ 内独立.

要解答函数独立性问题可考虑所谓函数矩阵, 它是由这些函数对所有自变量的偏导函数所组成的:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

①要紧的是, 函数 Φ 的直接自变量中不包含 x.

设 $n \geqslant m$, 我们首先有这样一个定理:

定理 1 如果由矩阵 (16) 的元素所组成的 m 阶行列式中至少有一个在区域 $\mathscr{D}$ 内不等于 0, 则在此区域内函数 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 独立.

证明 设

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{17}$$

如果不等于 0 的行列式不是这一个, 而是另外某一个, 则总可改编变量的下标而使其化为 (17) 的情形.

这定理我们用反证法来证明. 设诸函数中有一个, 比如说 y_m, 可由其余的表出, 如此

$$y_m = \Phi(y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}), \tag{18}$$

至少是在区域 $\mathscr{D}$ 的某一部分 $\mathscr{D}_0$ 里.

依每一变量 $x_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 求导这个恒等式我们得一系列恒等式 (在 $\mathscr{D}_0$ 内) 如下

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \frac{\partial y_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial y_m}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

可见, 行列式 (17) 最末一行诸元素可由前 $m-1$ 行相应元素各乘以 $\dfrac{\partial y_m}{\partial y_1}, \cdots, \dfrac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}$ 后相加得之. 大家知道这种行列式是等于 0 的. 这违反了定理的条件, 故证明等式 (18) 是不可能的.

323. 函数矩阵的秩 至于一般情形, 我们先给出如下定义. 所谓函数矩阵 (16) 的秩是指其中最高阶的在区域 $\mathscr{D}$ 内不恒等于 0 的行列式的阶数而言. 当然也可以有矩阵 (16) 的所有元素都恒等于 0 的时候 (此时说该矩阵的秩是 0), 但这情形不值得注意, 因为这里干脆所有函数

$$y_1, y_2, \cdots, y_m$$

都成常数. 如果矩阵 (16) 的秩是 $\mu \geqslant 1$, 则至少存在一个由该矩阵的元素所组成的 μ 阶行列式 (当然有 $m \geqslant \mu, n \geqslant \mu$) 并且在 $\mathscr{D}$ 内不恒等于 0, 而所有较高阶的行列式 (如果有的话) 则恒等于 0. 如果所说 μ 阶行列式在点 P_0 异于 0, 则我们说该矩阵在点 P_0 达到它的秩 μ.

定理 2 设函数矩阵 (16) 在区域 $\mathscr{D}$ 内的秩是 $\mu \geqslant 1$, 并且它在点 M_0 达到此秩. 于是在此点某一邻域 $\mathscr{D}_0$ 内 m 个函数中有 μ 个是独立的 [并且独立的函数就是这个在点 M_0 异于 0 的行列式中各偏导数所对应的那些函数], 而其余 $m-\mu$ 个都依赖着它们.

证明 为写起来简单一点我们只对一个特例来证明. 设给了三个三元函数:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3), \tag{19}$$

而函数矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{16*}$$

的秩为 2 并且在点 $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ 达到此秩. 设在该点某一行列式比如说是

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \tag{20}$$

异于 0. 既然诸偏导函数是连续的, 故在点 M_0 某一邻域内也如此, 因而按定理 1 函数 y_1 和 y_2 在此邻域内独立.

令

$$f_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = y_1^0, \quad f_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = y_2^0,$$

而对

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) - y_1 = 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3) - y_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

这具有五个变量 x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 的方程组在满足它们的点 $P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0)$ 上应用一个与 **317** 段的定理 3 相似的定理. 就是说利用方程组 (21) 左边对 x_1, x_2 诸偏导函数所组成的行列式异于 0, 我们可肯定在此点某一邻域

$$\begin{aligned} \mathscr{M}_0 = (&x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1; x_2^0 - \delta_2, x_2^0 + \delta_2; x_3^0 - \delta_3, x_3^0 + \delta_3; \\ &y_1^0 - \Delta_1, y_1^0 + \Delta_1; y_2^0 - \Delta_2, y_2^0 + \Delta_2) \end{aligned}$$

由方程组 (21) 将 x_1 和 x_2 确定为 x_3, y_1 及 y_2 的单值函数:

$$x_1 = \varphi_1(x_3, y_1, y_2), \quad x_2 = \varphi_2(x_3, y_1, y_2). \tag{22}$$

我们记得 —— 如果限于区域 $\mathscr{M}_0$ 内 —— 方程组 (21) 与 (22) 是完全等价的: 在该区域内的点只要满足其中一组也就满足另一组. 由我们所依据的定理可推知, 如果将函数 (22) 替代 (21) 中的 x_1 和 x_2, 则对变量 x_3, y_1, y_2 在长方体

$$(x_3^0-\delta_3, x_3^0+\delta_3; y_1^0-\Delta_1, y_1^0+\Delta_1; y_2^0-\Delta_2, y_2^0+\Delta_2)$$

内得一个恒等式. 但我们感兴趣的是另一个: 如果在 (22) 中以函数 f_1 和 f_2 替代 y_1 和 y_2, 则对变量 x_1, x_2, x_3 得一恒等式 —— 至少是在点 $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ 的某一邻域内. 即只要选取这个邻域为

$$\mathscr{D}_0=(x_1^0-\overline{\delta}_1, x_1^0+\overline{\delta}_1; x_2^0-\overline{\delta}_2, x_2^0+\overline{\delta}_2; x_3^0-\overline{\delta}_3, x_3^0+\overline{\delta}_3)$$

而使

$$0<\overline{\delta}_1\leqslant\delta_1, \quad 0<\overline{\delta}_2\leqslant\delta_2, \quad 0<\overline{\delta}_3\leqslant\delta_3,$$

并且使对其中各点由 (21) 定出的 y_1 和 y_2, 即函数 f_1 和 f_2 之值, 与 y_1^0 和 y_2^0 之差分别小于 Δ_1 和 $\Delta_2$①. 事实上, 这时候点 $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$ 落在 $\mathscr{M}_0$ 内而等式 (22) 应与 (21) 同时成立.

现在来看第三个函数

$$y_3=f_3(x_1, x_2, x_3);$$

这里以 (22) 诸函数代 x_1 及 x_2 而得

$$y_3=f_3(\varphi_1(x_3, y_1, y_2), \varphi_2(x_3, y_1, y_2), x_3)\equiv\Phi(x_3, y_1, y_2). \tag{23}$$

根据上面的话, 如果在这等式里函数 f_1, f_2 及 f_3 分别代之以 y_1, y_2, y_3, 则它对区域 $\mathscr{D}_0$ 内的诸 x 成恒等式.

要证明函数 y_3 依赖 y_1 及 y_2, 只剩下要证明函数 (23) 中的 Φ 事实上不含自变量 x_3, 如此 (23) 可写成这样:

$$y_3=\Phi(y_1, y_2).$$

为此显然只要证明对 x_3, y_1, y_2 有恒等式

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=0 \tag{24}$$

就行了. 按 Φ 的定义有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}. \tag{25}$$

①这是做得到的, 因为在点 M_0 函数 f_1 及 f_2 是连续的, 并在该点取值 y_1^0 和 y_2^0.

另一方面, 如果将方程 (21) 依 x_3 求导而将 x_1 及 x_2 看作 x_3, y_1, y_2 的函数, 则得等式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_1}{\partial x_3}=0,\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_2}{\partial x_3}=0,\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

这是 $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}$ 及 $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}$ 的一次式. 由这两个一次等式 (26) 又可推出第三个一次等式

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}=0, \tag{26*}$$

因为由上述各量的系数及自由项所组成的三阶行列式

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3}\end{vmatrix}$$

恒等于 0 (矩阵 (16) 的秩是 2). 将等式 (26*) 与 (25) 比较就得出所求的恒等式 (24).

例 我们来看一组函数

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad y_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$
$$y_3 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

不难验证函数矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3\\ x_2+x_3 & x_3+x_1 & x_1+x_2\end{pmatrix}$$

在全空间内有秩 2. 因此诸函数中有一个依赖其余两个, 例如

$$y_2 = y_1^2 - 2y_3.$$

§3. 函数行列式及其形式的性质

324. 函数行列式 在前一段里重要的研究工具是由偏导数组成的特殊类型的行列式; 它们对一组函数所起的作用就与寻常导数对一个函数所起的作用相似 [例如参看 **315**, **317** 段的定理 1 和 3 正文]. 我们在此讨论它们的一些形式的性质 (也提到寻常导数的相应性质), 这些性质使上述行列式今后用起来容易一些.

设给了 n 个 n 元函数

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

它在某一 n 维区域 $\mathscr{D}$ 内有定义并且在其中对所有变量都有连续的偏导函数. 我们由这些导函数组成行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

这个行列式叫做函数组 (1) 对变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的*函数行列式*并为简单起见用记号

$$\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

表示, 这正与寻常导数的表示法相似.

函数行列式是由雅可比和奥斯特罗格拉茨基几乎同时 (1833 年终及 1834 年初) 并且联系着同一问题 (多重积分变量替换) 引进科学里来的 [参看后面 **355**, **359**, **384** 各段]. 稍后 (1841 年) 雅可比发表了一篇论文, 其中讨论了这种行列式的性质, 并且详细给出了它在上述问题及隐函数理论上的应用. 因此函数行列式通常也就称为*雅可比行列式*或*雅可比式*. 上面所给函数行列式的表示法是后来英国人*洞金*所提出的.

325. 函数行列式的乘法 为写起来简单起见我们限于比如说三阶的行列式, 而所得结果完全具有一般性. 如此, 我们就由函数组

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ y_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}\right\} \tag{1*}$$

出发, 它们在一个 (三维) 区域 $\mathscr{D}$ 内有定义并且在其中对所有变量有连续的偏导函数. 除函数组 (1*) 外我们更取一组函数

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, t_3), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, t_3), \\ x_3 &= \varphi_3(t_1, t_2, t_3) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

在 (三维) 区域 $\mathscr{P}$ 内有定义并有连续导函数. 设点 (t_1, t_2, t_3) 在 $\mathscr{P}$ 中变动时相应点 (x_1, x_2, x_3) 不出区域 $\mathscr{D}$ 之外, 而 y_1, y_2, y_3 可看作 t_1, t_2, t_3 的通过 x_1, x_2, x_3 为媒介的复合函数. 现在我们把 (1*) 组的函数行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

乘以 (2) 组的函数行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial t_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial t_3} \end{vmatrix}.$$

在此我们利用已知的行列式乘法定理, 它可由公式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

表出, 其中

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

(行乘以列). 在我们的情形

$$c_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t_k},$$

即 (按复合函数导数公式)

$$c_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial t_k} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

结果得出行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial t_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial t_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial t_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial t_3} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial t_1} & \dfrac{\partial y_3}{\partial t_2} & \dfrac{\partial y_3}{\partial t_3} \end{vmatrix},$$

而这就是函数组 y_1, y_2, y_3 对变量 t_1, t_2, t_3 而言的函数行列式. 如此, 用简单的表示法就有

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)}. \tag{3}$$

如果我们有 x 的一个函数 y, 而 x 又是变量 t 的一个函数, 则将得出寻常复合函数导数公式 $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$; 所得公式 (3) 就是它的推广.

我们指出当 t_1, t_2, t_3 与 y_1, y_2, y_3 相同时这一特例, 如此函数组 (2) 就是函数组 (1) 的 "反转" 结果 (在此假设这反转的可能性). 于是上面所得关系就变成

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} = 1 \tag{4}$$

或

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \frac{1}{\dfrac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)}}. \tag{5}$$

写成这样的形式它就与反函数导数公式相似了.

326. 函数矩阵的乘法 这里我们举例来说明一种特殊形式的矩阵的乘法的一般结果. 我们先来看数矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

大家知道, 它们的乘积就是指方阵

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

而

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} \quad (i, k = 1, 2).$$

这个方阵的相应二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{vmatrix}$$

就等于两矩阵中二阶行列式两两相乘的乘积之和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix}.$$

这恒等式不难由展开诸行列式直接验证 (在高等代数里也建立了关于矩阵乘法的一般定理).

现在我们将这结果应用到函数矩阵上. 设我们有两个三元函数

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3),$$

而变量 x_1, x_2, x_3 又都是两个变量 t_1, t_2 的函数:

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2), \quad x_2 = \varphi_2(t_1, t_2), \quad x_3 = \varphi_3(t_1, t_2).$$

设所有函数都有连续偏导函数, 我们来找变量 t_1 及 t_2 的函数组 y_1 及 y_2 的函数行列式的表达式. 为此我们把这两个函数矩阵乘起来:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad 与 \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial t_2} \end{pmatrix}.$$

在这情形

$$a_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3),$$

$$b_{jk} = \frac{\partial x_j}{\partial t_k} \quad (j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2),$$

而最后有

$$c_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t_k}.$$

这里应用上面的结果得恒等式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial t_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_3}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial t_2} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} \end{vmatrix},$$

它简写起来就成这样:

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(t_1, t_2)} = \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \cdot \frac{D(x_1, x_2)}{D(t_1, t_2)} + \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_2, x_3)}{D(t_1, t_2)}$$
$$+ \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_3, x_1)} \cdot \frac{D(x_3, x_1)}{D(t_1, t_2)}. \tag{6}$$

如果我们只有一个函数 y, 它通过三个中间变量 x_1, x_2, x_3 而后者又依赖于变量 t, 则得到寻常复合函数微分公式:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{dy}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{dy}{dx_3} \cdot \frac{dx_3}{dt};$$

公式 (6) 就是它的推广.

以后我们还要深入讨论导数与函数行列式间的相似性 [**354** 段, 2°; **383** 段].

第二十章　线积分

§1. 第一型线积分

327. 第一型线积分　我们通过一个力学问题来自然地导出这个新的积分概念.

设给了一条有长的简单[①]平面曲线 (K) (图 8), 沿曲线分布着质量, 并且已知曲线上每点 M 处的线密度 $\rho(M)$. 现在要来求全曲线 (K) 的质量 m.

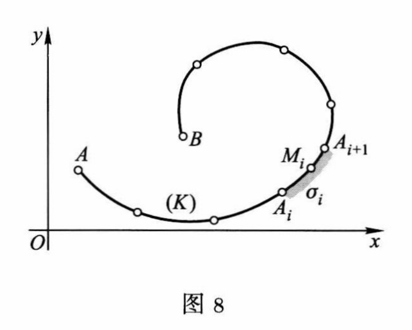


图 8

为此我们在曲线两端 A 与 B 之间任意地插入一系列的点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ (并将 A 写成 A_0, B 写成 A_n, 以求记号一律). 为确定起见, 我们认为这些点是按 A 至 B 的方向标号码的; 当然, 采取相反的方向标号码也无妨碍.

在弧 A_iA_{i+1} 上任取一点 M_i, 算出该点上的密度 $\rho(M_i)$. 把这一段弧的每点上的密度都近似地算作相等而以 σ_i 表该弧之长, 则该弧的质量近似地为:

$$m_i \approx \rho(M_i)\sigma_i,$$

而所求的全质量为

$$m \approx \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

---

①所谓简单曲线是指这样的连续曲线: 它由参变式给出, 而相应于每一点只有一个参变值; 在闭曲线的情形则 "闭合点" 是例外: 它相应于两个极端参变值.

此式的误差是由上面所作的近似假设而引起的. 如所有各段弧长 σ_i 趋于 0 时这个误差也趋于 0.

如此, 以 λ 表弧长 σ_i 中最大者, 则只要取极限就得出精确的公式:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

我们以一般形式来研究这种极限. 现在撇开所考虑的力学问题而取一个任意的"点函数" $f(M) = f(x, y)$, 它沿着一条有长连续平面曲线 (K)[①] 被给定, 并重复上面所说的过程: 将曲线 (K) 分成弧段 (弧元素) A_iA_{i+1}, 在每段上各任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$, 而算出这些点上的函数值 $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$ 并组成总和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i;$$

它也是一种积分和.

此和在 $\lambda = \max \sigma_i$ 趋于 0 时的有限极限称为函数 $f(M) = f(x, y)$ 沿曲线或道路 (K) 的第一型[②]线积分而表示成

$$\int_{(K)} f(M)ds = \int_{(K)} f(x, y)ds \tag{1}$$

(这里 s 是曲线的弧长而 ds 象征长度元素 σ_i).

这极限过程的精确描述让读者自己去做.

如此, 前面所得物质曲线的质量可以写成这样:

$$m = \int_{(K)} \rho ds. \tag{2}$$

特别指出的是, 在上面的定义里道路 (K) 的方向不起作用. 比如说, 当 (K) 不是封闭曲线时 (AB) 和 (BA) 虽然是方向不同的曲线, 但

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(BA)} f(M)ds.$$

同样, 我们可以建立沿空间曲线 (K) 的积分概念:

$$\int_{(K)} f(M)ds = \int_{(K)} f(x, y, z)ds^{③}.$$

这里没有什么新的原则性东西, 不需再详加解释了.

[①] 在此假设所依据的是直角坐标系.

[②] 这是和下面要讲的 [**330** 段] 第二型线积分不同的.

[③] 所依据的是一个直角坐标系. 函数 f 只在曲线 (K) 的点上有定义.

328. 化为寻常定积分 我们假设在曲线 (K) 上两个可能方向中任意选定其一, 如此曲线上每点 M 的位置可由弧长 $s=\widehat{AM}$ 来决定, 这里弧长是由点 A 算起的. 于是曲线 (K) 可由参变方程表出如下:

$$x=x(s),\quad y=y(s)\quad (0\leqslant s\leqslant S),$$

而沿曲线各点给定的函数 $f(x,y)$ 就化为变量 s 的复合函数 $f(x(s),y(s))$.

如果以 s_i $(i=0,1,\cdots,n)$ 表示和弧 AB 上所选分点 A_i 相应的弧的值, 则显然 $\sigma_i=s_{i+1}-s_i=\Delta s_i$. 以 $\overline{s}_i$ 表示决定点 M_i 的 s 值 (显然 $s_i\leqslant\overline{s}_i\leqslant s_{i+1}$), 于是可以看出线积分中的积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(M_i)\sigma_i=\sum_{i=0}^{n-1}f(x(\overline{s}_i),y(\overline{s}_i))\Delta s_i,$$

同时也就是寻常定积分中的积分和, 如此我们立即有:

$$\int_{(K)}f(M)ds=(R)\int_0^s f(x(s),y(s))ds^{①},\tag{3}$$

而由一个积分的存在就可推出另一积分的存在.

特别地, 在函数 $f(M)$ 连续② 的时候, 这个积分显然是存在的. 今后我们也就假设所论函数总是连续的.

现在设曲线 (K) 由任意参变方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T)$$

给出, 而函数 φ 及 ψ 连同其导函数 φ' 及 ψ' 都连续; 此外我们假设曲线上没有重点. 于是该曲线显然是有长的, 并且如果弧 $s=\widehat{AM}=s(t)$ 随参变量 t 一起增大, 则

$$s'(t)=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

[**201, 202** 段]. 在 (3) 式右边积分中作变量替换, 立即得出:

$$\int_{(K)}f(M)ds=(R)\int_{t_0}^T f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt.\tag{4}$$

如此, 要计算第一型线积分时须在被积函数中将变量 x 和 y 代以坐标的参变式同时 ds 也代以弧长微分的参变形式.

如果在参变量 t 增大时弧 $\widehat{AM}$ 变小, 则只要改为弧 $\widehat{MB}$, 就可重新得出公式 (4). 总之, 无论曲线的参变式如何, 在这公式里右边的积分下限必须小于上限.

①(R) 表示积分理解为寻常的黎曼积分.

②我们指的是在曲线 (K) 的点上沿该曲线的连续性. 以 "$\varepsilon-\delta$" 语言来说, 这就表示, 对 $\varepsilon>0$ 可找到这样一个 $\delta>0$, 使在 $\widehat{MM'}<\delta$ (M 及 M' 为曲线上的点) 时 $|f(M')-f(M)|<\varepsilon$. 在此假设下只要 $x(s)$ 和 $y(s)$ 连续则对 s 复合函数 $f(x(s),y(s))$ 也就连续.

在曲线由显式方程

$$y = y(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

给出的情形, 则公式 (4) 变成:

$$\int_{(K)} f(M)ds = (R)\int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx. \tag{5}$$

这个关系式还可取另一形式, 在函数 $y(x)$ 连同其导函数 $y'(x)$ 都连续的假设之下曲线 (K) 在每点上将有一定的与 y 轴不平行的切线. 以 α 表切线与 x 轴的交角, 得

$$\tan\alpha = y'(x), \quad |\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}.$$

所以

$$\int_{(K)} f(M)ds = \int_a^b \frac{f(x, y(x))}{|\cos\alpha|}dx. \tag{6}$$

在特例, 因为显然

$$\int_{(K)} ds = S$$

(这里 S 表示曲线 (K) 之全长), 于是

$$S = \int_a^b \frac{dx}{|\cos\alpha|}. \tag{7}$$

附注 公式 (7) 我们是以形式变换得出的. 如果将曲线弧长定义为外切 (不是内接) 折线全长的极限, 则在曲线以显式给出时这个定义将直接导出公式 (7). 这一点读者可以自己验明.

329. 例 1) 设 (K) 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在第一象限中的四分之一, 我们来计算

$$I = \int_{(K)} xyds.$$

由椭圆参变式 $x = a\cos t, y = b\sin t$ 出发我们有

$$x'_t = -a\sin t, \quad y'_t = b\cos t, \quad \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}.$$

计算可按公式 (4) 来进行:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot b\sin t \cdot \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\sqrt{a^2\frac{1-\cos 2t}{2} + b^2\frac{1+\cos 2t}{2}}dt. \end{aligned}$$

这里我们令 $\cos 2t = z$, 于是 $\sin 2tdt = -\frac{1}{2}dz$ 而

$$\begin{aligned} I &= \frac{ab}{4}\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}z}dz \\ &= \frac{ab}{4} \cdot \frac{2}{b^2-a^2} \cdot \frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}z\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^1 = \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}. \end{aligned}$$

附注 大多数经常遇到的曲线 (椭圆、双曲线、正弦型曲线等) 其弧长都不能表示为初等函数, 因为 ds 不能积分成有限的形式. 但是对这些曲线, $\int_{(K)} f(x,y)ds$ 这个积分却有时可以算出是初等函数 (如前例), 这是因为乘上了 $f(x,y)$ 就改变了积分号下微分式的整个结构.

有关沿物质曲线连续分布的质量问题可以很自然地导出这种类型的线积分.

2) 我们在第十二章 [**206** 段] 曾经在 "线密度" $\rho = 1$ 的假设之下计算过平面曲线对坐标轴的静矩以及其质心的坐标. 读者不难将那里所得公式推广到质量连续分布的一般情形. 如果利用所引入的线积分概念, 则结果可写成下面的形状:

$$K_y = \int_{(K)} \rho x ds, \quad K_x = \int_{(K)} \rho y ds,$$

$$x_c = \frac{K_y}{m} = \frac{\int_{(K)} \rho x ds}{\int_{(K)} \rho ds}, \quad y_c = \frac{K_x}{m} = \frac{\int_{(K)} \rho y ds}{\int_{(K)} \rho ds}.$$

3) 我们还指出第一型线性积分的一种应用 —— 应用于物质曲线对质点的引力问题.

我们知道, 按牛顿定律, 一个质量为 m 的质点 M 吸引一个质量为 m_0 的质点 M_0 时, 引力的方向是由 M_0 至 M, 引力的大小则等于 $k\dfrac{mm_0}{r^2}$, 这里 r 是距离 M_0M, 而 k 是随所采用量度单位而定的系数, 为简单起见通常可算它等于 1.

如果一个质点 M_0 被一组质量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的质点 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 所吸引, 则合力可由各质点的引力的几何加法得出. 同时合力在诸坐标轴上的投影就等于各力的投影的代数和.

如果以 X 与 Y 表示合力在坐标轴上的投影, 而以 θ_i 表示分向量 $\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{M_0M_i}$ 与 x 轴的交角 (图 9), 则显然

$$X = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \cos\theta_i, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \sin\theta_i,$$

这里 r_i 如惯例表示向量 $\overrightarrow{r_i}$ 之长.

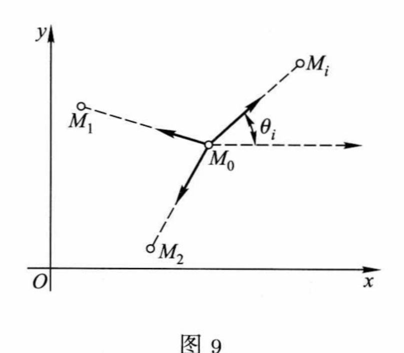


图 9

现在设吸引质量沿曲线 (K) 连续分布. 为了计算引力我们将该曲线分段, 并且将每段的质量集中于在它上面任意选取的一点 M_i 上而来求合力在坐标轴上的投影的近似值:

$$X \approx \sum_i \frac{m_0 \rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2} \cos\theta_i,$$

$$Y \approx \sum_i \frac{m_0 \rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2} \sin\theta_i,$$

因为在这情形各段的质量近似地等于 $\rho(M_i)\sigma_i$. 如果令所有 σ_i 趋于 0, 则在极限情形得出精确的等式而总和变成了积分:

$$X = m_0 \int_{(K)} \frac{\rho(M)\cos\theta}{r^2} ds, \quad Y = m_0 \int_{(K)} \frac{\rho(M)\sin\theta}{r^2} ds; \tag{8}$$

这里 r 表示向量 $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_0M}$ 之长, 而 θ 表示其与 x 轴所成之角.

例如我们来求一个均匀半圆周 ($\rho = 1$) 对其中心处一个单位质量的引力.

将坐标原点取在半圆周的中心而 x 轴通过其两端 (图 10).

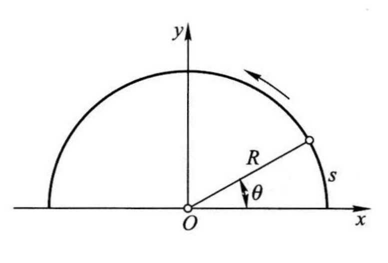


图 10

由于对称性可推想到 $X = 0$, 如此只要找出投影 Y 就行了. 按公式 (8)

$$Y = \int \frac{\sin\theta}{r^2} ds.$$

但在当前这情形 $r = R$ (半圆周的半径) 而 $ds = Rd\theta$. 所以

$$Y = \frac{1}{R}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{2}{R}.$$

§2. 第二型线积分

330. 第二型线积分定义 现在来讨论实际上更重要的第二型线积分的概念. 我们在此直接由它的定义开始, 而其应用则等以后再讲 [例如见 **335** 段]. 设给定了一条简单曲线 (AB) (暂假设它是非闭曲线) 并设沿该曲线又给定了一个函数 $f(x, y)$①. 将曲线用 $A_i(x_i, y_i)$ 诸点分为 n 段而在每段 A_iA_{i+1} 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$ 并像以前一样算出该点上的函数值 $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$. 但此值这次不是乘以弧 $\widehat{A_iA_{i+1}}$ 之长而是乘以此弧在坐标轴上的投影, 比如说, x 轴上的投影 $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$; 然后组成积分和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i.$$

此和在 $\mu = \max \overline{A_iA_{i+1}}$ 趋于 0 时的有限极限就叫做 $f(M)dx$ 沿曲线或道路 (AB) 所取的 (第二型) 线积分并用符号表示为

$$I = \int_{(AB)} f(M)dx = \int_{(AB)} f(x, y)dx. \tag{1}$$

同样, 将 $f(M_i)$ 值乘以弧 $\widehat{A_iA_{i+1}}$ 在 y 轴上的投影 Δy_i(而不是乘以 Δx_i) 并组成和式

$$\sigma^* = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta y_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i,$$

则其极限即为 $f(M)dy$ 的 (第二型) 线积分:

$$I^* = \int_{(AB)} f(M)dy = \int_{(AB)} f(x, y)dy. \tag{2}$$

①参看 **327** 段第二个脚注.

如果沿曲线定义了两个函数 $P(M) = P(x,y)$ 及和 $Q(M) = Q(x,y)$ 并且存在积分

$$\int_{(AB)} P(M)dx = \int_{(AB)} P(x,y)dx,$$
$$\int_{(AB)} Q(M)dy = \int_{(AB)} Q(x,y)dy,$$

则它们的和也叫做线积分 ("一般形式") 而令

$$\int_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(AB)} P(x,y)dx + \int_{(AB)} Q(x,y)dy^{①}. \tag{3}$$

现在我们来比较两种类型线性积分的定义 [参看本段 (1) 或 (2) 与 **327** 段 (1)]. 两个定义除明显的相似之外还有重要的差异, 这我们再一次强调指出: 在第一型积分里组成积分和时函数值 $f(M_i)$ 是乘以弧段 $\widehat{A_iA_{i+1}}$ 之长 $\sigma_i = \Delta s_i$, 而在第二型里则 $f(M_i)$ 值是乘以该弧段在 x 轴 (或 y 轴) 上的投影 Δx_i (或 Δy_i).

我们已经看到, 积分道路 (AB) 的方向在第一型积分的情形不起作用, 因为弧 $\widehat{A_iA_{i+1}}$ 之长 σ_i 与这方向无关. 第二型积分情形就不同了: 该弧在各坐标轴上的投影主要取决于弧的方向并且方向反过来时投影也就变正负号. 如此, 对第二型积分有

$$\int_{(BA)} f(x,y)dx = -\int_{(AB)} f(x,y)dx$$

同样,

$$\int_{(BA)} f(x,y)dy = -\int_{(AB)} f(x,y)dy,$$

这里由一边积分的存在可推知另一边积分也存在.

用同样方式可建立沿空间曲线 (AB) (姑且说非封闭的) 的第二型线积分的概念. 即, 如果函数 $f(M) = f(x,y,z)$ 给定在此曲线的点上, 则我们如前组成 "积分和"

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i$$

并且考虑它在 $\mu = \max \overline{A_iA_{i+1}}$ 趋于 0 时的极限. 这个极限就叫做 $f(M)dx$ 的 (第二型) 线积分并用符号表示为

$$\int_{(AB)} f(M)dx = \int_{(AB)} f(x,y,z)dx.$$

同样可定义积分:

$$\int_{(AB)} f(M)dy = \int_{(AB)} f(x,y,z)dy$$

①关于线积分历史考证读者可查 **350** 段附注.

及

$$\int_{(AB)} f(M)dz = \int_{(AB)} f(x,y,z)dz.$$

最后, 也可考虑 "一般形式" 的积分

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(AB)} Pdx + \int_{(AB)} Qdy + \int_{(AB)} Rdz.$$

这里积分的正负号也随积分方向而改变.

最后注意寻常定积分的简单性质都不难搬到线积分上来; 对此不必细讲了.

331. 第二型线积分的存在及其计算 设曲线 $(K) = (AB)$ 由参变方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{4}$$

给出, 而 φ 和 ψ 是连续的并且参变量 t 由 α 变至 β 时曲线即依 A 至 B 的方向描出, 沿曲线 (AB) 的函数 $f(x,y)$ 也假设是连续的①.

如果对积分 (1) 来说, 则还须补充导函数 $\varphi'(t)$ 存在并连续这个条件.

在这些假设之下线积分 (1) 就存在并且成立等式

$$\int_{(AB)} f(x,y)dx = (R)\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt. \tag{5}$$

如此, 要计算线积分 (1), 需在被积函数中将其变量 x 和 y 代以其参变表达式 (4), 而 dx 则代以 x 的参变式的微分. 在最后积分中积分限的次序要和曲线上所选取的方向相应.

证明 设曲线上所取的点 A_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 由参变量值 t_i 决定, 而在弧 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ 上所选取的点 M_i 由参变量值 τ_i 决定 (显然 $t_i \leqslant \tau_i \leqslant t_{i+1}$). 于是积分和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i,$$

考虑到

$$\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)dt,$$

它可写成:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)dt.$$

另一方面, (5) 式中右边的积分②也可表示为和的形式:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt.$$

---

①类似 **328** 段中第三个脚注中的话也适用于此, 只是要将弧 $\overset{\frown}{MM'}$ 代以弦 MM'.

②因为被积函数连续, 故该积分显然是存在的.

由此有

$$\sigma - I = \sum_{t=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))]\varphi'(t)dt.$$

任意指定一个 $\varepsilon > 0$, 而现在假设所有 Δt_i 都充分小, 使在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 中连续函数 $f(\varphi(t), \psi(t))$ 的摆幅小于 ε. 既然连续函数 $\varphi'(t)$ 是有界的: $|\varphi'(t)| \leqslant L$, 则有

$$|\sigma - I| < \varepsilon L |\beta - \alpha|.$$

如此, 在 $\lambda = \max \Delta t_i$ 趋于 0 时①

$$\lim \sigma_i = I,$$

由此同时证明了线积分的存在及所求的等式.

在连续导函数 $\psi'(t)$ 存在的条件下, 对于积分 (2), 也可由类似方式确定其存在并可证明公式

$$\int_{(AB)} f(x,y)dy = (R)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)dt. \tag{5*}$$

最后, 对于一般形式的积分

$$\int_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

其中 P 和 Q 是连续函数, 则在曲线 (AB) 上我们加一条件: 要求两函数 (4) 都有连续导函数. 在这假设下则成立公式

$$\begin{aligned}&\int_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\\&= (R)\int_\alpha^\beta [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt.\end{aligned} \tag{6}$$

线积分的定义及这里所讲的将它记为寻常定积分的方法都可直接推广到曲线 (4) 自身相交的情形, 只要在它上面的方向仍与前面一样由参变量 t 单调地自 α 变化至 β 而定.

最后我们指出线积分中一些计算起来特别简单的情形.

设积分 (2) 沿一条由显式方程

$$y = y(x)$$

所给的曲线来取, 而当 x 由 a 变至 b 时曲线上的点由 A 移至 B.

于是对曲线除连续性外不必加任何假设我们就有

$$\int_{(AB)} f(x,y)dx = (R)\int_a^b f(x, y(x))dx. \tag{7}$$

①在非封闭曲线的情形这就等价于最大弦趋于 0 [**200** 段].

同样, 如果积分 (2^*) 沿另一种由显式方程

$$x = x(y)$$

给定的连续曲线, 而 y 由 c 变至 d, 则有

$$\int_{(AB)} f(x,y)dy = (R)\int_c^d f(x(y),y)dy. \tag{7*}$$

最后, 如果积分 (7) 展布在平行于 y 轴的一段直线 (AB) 上, 则它等于 0 (因此时所有 Δx_i, 因而同时和 σ, 都等于 0). 同样, 积分 (7^*) 沿平行于 x 轴的一段直线来取时也等于 0.

附注 如果一条曲线 (K) 分割成彼此衔接的有限多段而线积分沿每段分别存在并且可按上述公式之一计算出来, 则不难算出沿全曲线 (K) 的积分, 即沿各段的积分之和.

332. 闭路的情形 · 平面的定向法 我们来讨论闭路 (K) 的情形, 即积分道路的起点 A 与终点 B 重合为一的情形. 在曲线上取一与 A 不同的点 C, 而按照曲线上所选定的方向 (如图 11 箭头所指) 令

$$\int_{(K)} = \int_{(AMC)} + \int_{(CNA)}$$

作为定义, 在此假设右边的积分是已知其存在的.

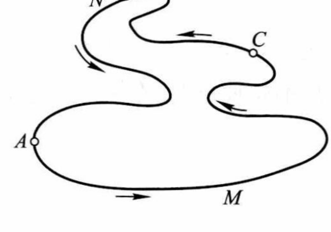


图 11

不难证明这个积分的存在及数值均与点 A 和 C 的选择法无关. 此外, 对闭路 (K) 的情形前段所导出 (5), (5^*), (6) 诸公式都可应用.

当前这情形的特点在于: 起点及 (与它重合的) 终点的指定, 此时并不能决定描出曲线 (K) 的方向. 可以在每一情形都特别说明取的是什么方向. 对空间曲线来说必须这样处理. 在平面闭路 (K) 的情形则通常采取别的办法.

由一个平面的两种可能*旋转方向* —— “反时针向” 及 “顺时针向” —— 选取其一作为正的: 如此就建立了*平面的定向法*. 如果反时针向旋转的方向算作正的, 则这种平面定向法称为右定向法, 另一情形则称为左定向法.

在平面右定向法的情形我们就根据反时针向旋转来定义简单闭路上的正向 (图 12a). 当然, 这个定义只有道路近似于圆时才有充分明显的性质. 所以我们更将条件予以明确化如下: 所谓简单闭路的环行*正向*指的是这样的方向, 一个观察者循该方向沿道路环行时, 道路所围区域靠近他的部分落在他的*左边* (图 12a).

在平面左定向法的情形则*正向*指的是*顺时针向*环行, 而此时道路所围区域总落在观察者*右边* (图 12b).

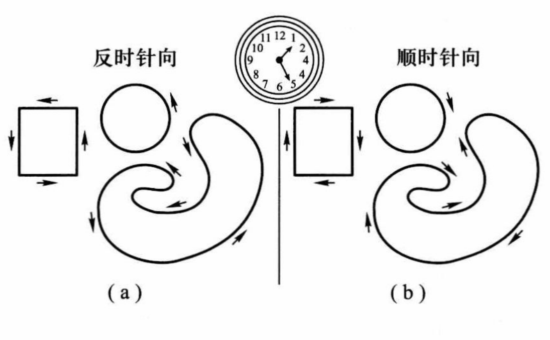


图 12

平面上坐标轴的摆法与其定向法有一定的关系: 在右定向法之下 y 轴可由 x 轴循反时针向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 之角而得, 在左定向法之下则循顺时针向旋转而得 (图 13a, b). 第一种情形称为右手坐标系, 第二种情形称为左手坐标系.

经此说明后我们可以永远约定: 如果积分道路 (K) 是一条简单闭曲线, 则

$$\int_{(K)} Pdx + Qdy$$

这个记号在不指明闭路环行方向时恒理解为积分是循**正**向来取的. 当然, 这种约定并不妨碍我们必要时考虑循负向的积分, 但我们将表之以

$$-\int_{(K)} Pdx + Qdy.$$

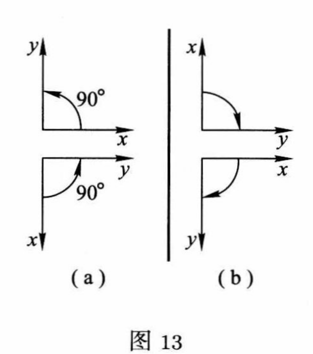


图 13

图 14

333. 例 1) 我们来计算线积分

$$H = \int_{(L)} 2xydx + x^2dy,$$

积分道路是联结点 $O(0,0)$ 与点 $A(1,1)$ 的曲线 (L). 设 (L) 是 (a) 直线 $y = x$, (b) 抛物线 $y = x^2$, (c) 抛物线 $x = y^2$, (d) 三次抛物线 $y = x^3$ (图 14).

(a) 因为 $dy = dx$, 于是

$$\int_{(L)} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 3x^2dx = 1;$$

(b) $dy = 2xdx, H = \int_0^1 4x^3dx = 1;$

(c) $dx = 2ydy, H = \int_0^1 5y^4dy = 1;$

(d) $dy = 3x^2dx, H = \int_0^1 5x^4dx = 1.$

2) 计算线积分

$$G = \int_{(L)} xydx + (y-x)dy,$$

积分道路同上.

答案 (a) $\frac{1}{3}$, (b) $\frac{1}{12}$, (c) $\frac{17}{30}$, (d) $-\frac{1}{20}$.

3) 求线积分

$$I = \int_{(OA)} (x-y^2)dx + 2xydy,$$

积分道路是下列联结点 $O(0,0)$ 与点 $A(1,1)$ 诸线之一 (图 14). (a) 一段直线 OA $(y=x)$; (b) 由 x 轴上线段 OP $(y=0)$ 与直线 $x=1$ 上的线段 PA 所组成的折线 OPA; (c) 由 y 轴上 $(x=0)$ 线段 OQ 与直线 $y=1$ 上线段 QA 所组成的折线 OQA.

(a) 因为 $y=x$ 及 $dy=dx$, 于是

$$I = \int_0^1 (x+x^2)dx = \frac{5}{6}.$$

(b) 在这情形自然可将积分道路分为两段:

$$I = \int_{(OPA)} = \int_{(OP)} + \int_{(PA)} = I_1 + I_2.$$

沿 OP 我们有: $y=0$ 及 $dy=0$, 如此

$$I_1 = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

沿 PA 则有: $x=1$ 及 $dx=0$, 故

$$I_2 = \int_0^1 2ydy = 1.$$

如此最后得 $I = \frac{3}{2}$.

(c) 与前面同样我们有 (因沿线段 OQ 积分等于 0):

$$I = \int_{(QA)} = \int_0^1 (x-1)dx = -\frac{1}{2}.$$

4) 在同样条件下求积分

$$I = \int_{(OA)} (y^2+2xy)dx + (2xy+x^2)dy.$$

答案 在所有情形 $I = 2$.

附注 读者或许已注意到例 1)、例 4) 的结果与例 2)、例 3) 的结果之间的差别. 1) 与 4) 中的积分的值与联结起点终点的道路无关. 反之, 在例 2) 与例 3) 里则我们所碰到的积分的值随联结起点终点的道路而变. 下一章 (§4) 我们将专门讨论这个问题并阐明其重要性.

5) 我们来计算积分

$$K = \int_{(L)} y^2 dx - x^2 dy,$$

这里 (L) 是一个圆, 其半径为 1, 圆心在 (a) 坐标原点或 (b) 在点 $(1, 1)$.

(a) 由参变方程 $x = \cos t, y = \sin t$ 出发, 这里 t 由 0 变至 2π, 于是按公式 (6) 有

$$K = -\int_0^{2\pi} (\sin^3 t + \cos^3 t)dt = 0.$$

(b) 同样用参变表示法

$$x - 1 = \cos t, \quad y - 1 = \sin t$$

得

$$K = -\int_0^{2\pi} (2 + \sin t + \cos t + \sin^3 t + \cos^3 t)dt = -4\pi.$$

334. 两种类型线积分间的关系 我们来考虑一条光滑的简单曲线① $(K) \equiv (AB)$ 并且取弧 $s = \widehat{AM}$ 作参变量而将它用方程式

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant S)$$

表出 [**201**, **202** 段]; 函数 $x(s), y(s)$ 有连续导函数 $x'(s), y'(s)$. 如果以 α 表示切线与 x 轴所成之角, 切线指向弧增长的一边, 则我们知道 [**211** 段, (4)]

$$\cos\alpha = x'(s), \quad \sin\alpha = y'(s).$$

如果沿曲线 (K) 给定了一个连续函数 $f(M) = f(x, y)$, 则我们逐步有

$$\begin{aligned} \int_{(K)} f(M)dx &= \int_0^S f(x(s), y(s))x'(s)ds \\ &= \int_0^S f(x(s), y(s))\cos\alpha ds = \int_{(K)} f(M)\cos\alpha ds, \end{aligned}$$

如此第二型线积分化成了第一型线积分.

同样可得

$$\int_{(K)} f(M)dy = \int_{(K)} f(M)\sin\alpha ds.$$

如果沿曲线 (K) 给定了两个连续函数 $P(M) = P(x, y)$ 和 $Q(M) = Q(x, y)$, 则

$$\int_{(K)} Pdx + Qdy = \int_{(K)} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)ds. \tag{8}$$

①曲线 (4) 称为光滑曲线是指函数 φ 和 ψ 有不同时等于 0 的连续导函数.

着重指出, 在所有这些公式里角 α 都按照切线的相应于曲线 (K) 本身方向的那个方向来计算. 如果改变曲线的方向, 则不但左边的积分变号, 并且由于切线方向的改变, 角 α 要变动 $\pm\pi$, 从而右边的积分也就变号.

显然, 所推出的公式对逐段光滑①的简单曲线也仍适用; 这只要对每一段光滑曲线写出相应的公式并逐一加起来就可明白.

类似的想法也可以推广到沿空间曲线的线积分. 结果得出公式

$$\int_{(K)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(K)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds, \tag{9}$$

这里 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是切线的方向余弦, 并假设切线的方向相应于积分道路的方向.

335. 在物理问题上的应用 最后我们来讲两个力学及物理中的重要问题, 读者由此可以对本段所建立诸概念的实用意义有一个印象.

1) *力场的功* 设在 xy 平面 (或其一部分) 的每点 M 处所放的单位质量上加一力 $\overrightarrow{F}$, 其大小与方向只与点 M 的位置有关; 如果在 M 处质点的质量 m 不等于 1, 则加于该点的力将等于 $m\overrightarrow{F}$. 在这些条件下该平面 (或其中被考虑的一部分) 称为一个 (平面的) *力场*, 而加于单位质量上的力称为*场的强度*. 要给出力 $\overrightarrow{F}$ 的大小与方向只要给出其在坐标轴上的投影 X, Y 也是一样的, 而这些投影显然就是点 M 的坐标 x, y 的函数:

$$X = X(x,y), \quad Y = Y(x,y).$$

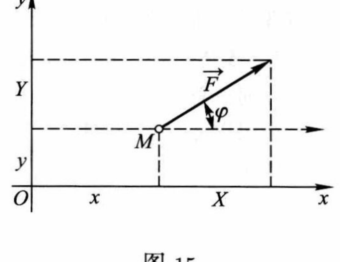


图 15

如果 φ 是矢量 $\overrightarrow{F}$ 与 x 轴所成的角, 则 (图 15)

$$X = F\cos\varphi, \quad Y = F\sin\varphi. \tag{10}$$

现在设力场中一个具有单位质量的质点 $M(x,y)$ 运动而以一定的方向描出一条连续曲线 (K), 问题是要计算在这运动下力场所做的功 $\boldsymbol{A}$.

如果加于该点的力保持固定的大小 F 并有固定方向,而点的位移沿直线进行, 则我们知道功 $\boldsymbol{A}$ 可表示为位移 l 乘以力在位移方向上的投影:

$$\boldsymbol{A} = Fl\cos\theta,$$

这里 θ 是力 $\overrightarrow{F}$ 与位移方向间的夹角.

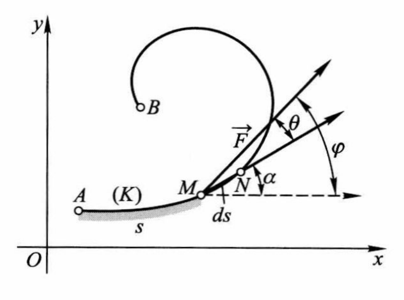


图 16

如果运动不是直线的并且力不是固定的, 则功要用一种极限过程来决定②. 我们以弧 $\widehat{AM}$ 之长 s 来决定曲线 (K) 上点 M 的位置 (图 16). 考虑曲线的无穷小元素 $MN = ds$; 把它当作直线的并且近似地认为力 $\overrightarrow{F}$ 及其与位移 ds 的角 θ 都不变其值. 于是相应元功为

$$d\boldsymbol{A} = F\cos\theta ds.$$

①这就指的是由几段相互衔接的光滑曲线所组成的曲线.

②这里及以后我们宁采取第一卷中 [**204** 段] 所用的简单说法. 极限过程不明白说出来了.

现在只剩下把这些元功沿全曲线 (K) "加起来", 结果功 $\boldsymbol{A}$ 就表示成第一型线积分:

$$\boldsymbol{A} = \int_{(K)} F\cos\theta ds. \tag{11}$$

我们引入元素 ds 的方向 (即曲线在点 M 的切线的方向) 与 x 轴间的角 α. 显然, $\theta = \varphi - \alpha$, 如此

$$\cos\theta = \cos\varphi\cdot\cos\alpha + \sin\varphi\cdot\sin\alpha,$$

而由 (10) 积分元素可写成:

$$(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)ds.$$

功的表达式 (11) 就成这样的形式:

$$\boldsymbol{A} = \int_{(K)} (X\cos\alpha + Y\sin\alpha)ds.$$

现在由表示两型线积分关系的公式 (8) 力场的功最后表示成了第二型的线积分:

$$\boldsymbol{A} = \int_{(K)} Xdx + Ydy. \tag{12}$$

这就是功 $\boldsymbol{A}$ 的最常用的表达式, 便于研究一系列有关功的重要问题, 如: 所作功与联结两定点的轨线形式是否有关? 沿闭轨线的全功是否恒等于 0? [关于这点参看下面 **348 – 351** 段].

2) 不可压缩流体的平面定常流动　这种运动的特征是, 第一, 垂直于某平面的同一垂线上的所有各质点都有同一速度, 所以要描述整个运动时只要研究其在一个平面上的运动就行了①; 第二, 流体各质点的速度 $\overrightarrow{c}$ 只与各质点的位置有关而与时间无关. 如此, 对该平面 (或其一部分) 的每个几何点总有一个大小与方向都一定的速度与之对应联系着; 换句话说, 给定了一个 "速度场".

如果以 φ 表示向量 $\overrightarrow{c}$ 与 x 轴所成的夹角, 而以 u 和 v 表示该向量在坐标轴上的投影, 则 (图 17a)

$$u = c_x = c\cos\varphi,\quad v = c_y = c\sin\varphi.$$

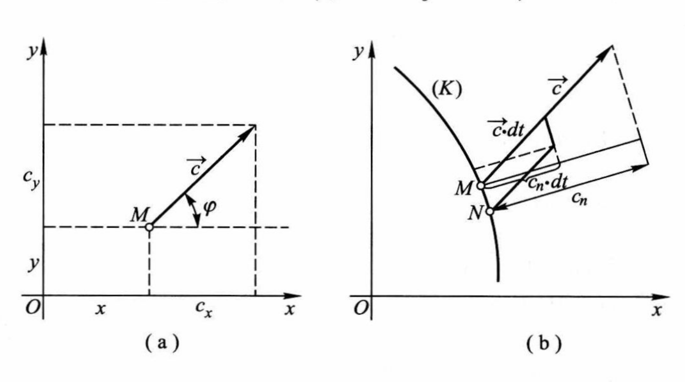


图 17

现在我们在 xy 平面上取一任意曲线 (K) 而来决定单位时间内通过曲线流向曲线某侧的流体的分量 Q. 假设该流体是不可压缩的, 则流体的量即可用它所掩盖图形的面积来量度. 如事实上流体向着和所取的相反一侧流动, 则流体的流量算作负的.

①我们就选这个平面作 xy 面.

取曲线 (K) 的一个元素 $MN = ds$. 在时间 dt 内通过这一元素的流量等于

$$c_n ds dt, \tag{13}$$

这里 c_n 是速度 $\vec{c}$ 在元素 ds 的法线 n 上的投影, 法线是指向所选定的曲线的那一侧的. 事实上, 这个量就等于以 ds 及 cdt 为边的平行四边形的面积, 其高恰为 $c_n dt$ (图 17b)[①]. 要计算单位时间内流体通过元素 ds 的流量, 只要将 (13) 式依元素 dt 求和, 得出 $c_n ds$. 将所得式子再依曲线 (K) 的所有元素求和, 即得所求流量 Q, 表示为第一型线积分的形式:

$$Q = \int_{(K)} c_n ds.$$

如果按惯例以 α 表示切线与 x 轴间的夹角, 则 $\lambda = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$ 给出法线与该轴的夹角, 于是速度 $\vec{c}$ 的方向与法线间的夹角将为 $\varphi - \lambda = \varphi - \alpha - \dfrac{\pi}{2}$, 而

$$\begin{aligned} c_n &= c \cdot \cos\left(\varphi - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = c \cdot \sin(\varphi - \alpha) \\ &= c \cdot \sin\varphi \cdot \cos\alpha - c \cdot \cos\varphi \cdot \sin\alpha = v\cos\alpha - u\sin\alpha, \end{aligned}$$

如此

$$Q = \int_{(K)} (v\cos\alpha - u\sin\alpha) ds.$$

再由公式 (8) 又可转变为第二型线积分

$$Q = \int_{(K)} udx - udy. \tag{14}$$

特别要注意的是, 曲线上的方向应这样选取, 使得相应的切线方向与预先选定的法线间的夹角等于 $+\dfrac{\pi}{2}$, 因为当初公式 (14) 正是在这假设之下导出的.

如果 (K) 是闭路而积分 (14) 是沿正的方向取的 [这是惯例, 见 **332** 段], 则为了适合刚才所说的条件法线应指向道路 (K) 所围的区域的内部, 所以在这情形公式 (14) 就给出单位时间内流体通过边界 (K) 流向区域内部的流量. 如果要得出由边界 (K) 所围区域流向域外的流量, 只需改变公式 (14) 的正负号就可以了.

其次, 如该场中流体既无 "源" 也无 "汇", 则在任一有界区域内流量保持不变. 所以, 无论取怎样的闭曲线, 沿它所取的积分 (14) 总应该等于 0.

所以, 如果 u 和 v 是不可压缩流体在平面定常流动中的分速度, 则当没有源和汇时, 无论 (K) 是怎样的闭路总有

$$\int_{(K)} vdx - udy = 0.$$

以后 [**351** 段, 2)] 我们将看到, 这个由物理想法所得出的结果也可以给出函数 u 和 v 的一种分析的特征.

[①] 在此把元素 ds 当作直线的, 且认为它的所有各点上流体质点的速度都相同, 在时间元素 dt 内其大小方向均保持为常数.

第二十一章　二重积分

§1. 二重积分定义及简单性质

336. 柱体体积问题　正如曲线梯形面积问题引出了简单定积分的概念一样 [**175** 段], 现在柱体体积问题同样也引出一种新的概念 —— 二重 (定) 积分.

我们试看一个立体 (V), 它的上面以曲面

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

为界, 侧面为柱面, 其母线平行于 z 轴, 下面则以 xy 平面上一个平面图形 (P) 为底 (图 18). 现在要来求它的体积 V.

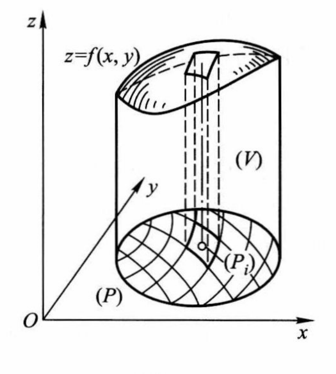


图 18

要解决这个问题, 我们采取寻常积分学中的方法: 将所求的量分为部分 —— 元素, 取每部分的近似值, 加在一起, 然后求其极限. 如此, 我们把区域 (P) 用曲线网分为许多小区域 $(P_1), (P_2), \cdots, (P_n)$, 并且来考虑一系列柱形细条, 它们以这些小区域为底, 而合起来就组成该立体.

为了要算出各柱形细条的体积我们在每个小区域 (P_i) 内任取一点 (ξ_i, η_i). 如果把每个柱形细条就近似地看作是一个以 z 坐标 $f(\xi_i, \eta_i)$ 为高的真正柱体形, 则各柱形细条的体积就近似地等于

$$f(\xi_i, \eta_i) P_i,$$

这里 P_i 表示图形 (P_i) 的面积. 在这样的情形下该立体的整个体积就可近似表示为

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i.$$

要提高这个等式的精确度我们可缩小 (P_i) 的面积而增加其数目. 令所有小区域 (P_i) 中最大的直径也趋于 0, 在极限情形这个等式便成为精确的, 如此

$$V = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i,$$

而所提的问题就解决了.

这种形式的极限就是函数 $f(x, y)$ 在区域 (P) 上的二重积分, 表示成

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y) dP.$$

于是上面所得的体积公式就成为:

$$V = \iint\limits_{(P)} f(x, y) dP^{①}. \tag{2}$$

如此, 二重积分就是把简单定积分概念直接推广到二元函数的情形, 在计算种种不同的几何量及物理量时它同样起着重要的作用.

337. 化二重积分为累次积分 继续将二重积分几何地解释为柱体的体积, 我们在此也指出如何用化为累次积分的方法来计算它.

在第一卷里我们已处理过按立体横断面来计算其体积 (V) 的问题 [**198** 段]. 我们再提一下这里有关的公式. 设立体界于平面 $x = a$ 及 $x = b$ 之间 (图 19). 又设立体被一个与 x 轴垂直而相应于横坐标 x $(a \leqslant x \leqslant b)$ 的平面所截时所得截面面积为 $Q(x)$. 于是该立体体积, 如果存在的话, 可由公式

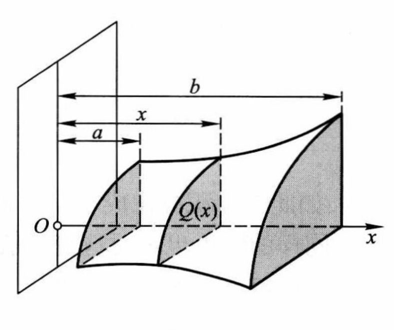


图 19

$$V = \int_a^b Q(x) dx \tag{3}$$

表出.

现在我们应用这个公式来计算上段所说柱体的体积. 先由柱体底面为矩形 $[a, b; c, d]$ 的这一简单情形说起 (图 20).

①在曲面 (1) 连续并且图形 (P) 可求积的情形下, 这个公式的推导不难, 并且可以有完全严密的形式; 参看 **340** 段附注.

柱体被平面 $x = x_0$ $(a \leqslant x_0 \leqslant b)$ 截成一曲线梯形 $\alpha\beta\delta\gamma$. 要计算其面积我们将此图形投射到 yz 平面上, 如此得一与其全等的梯形 $\alpha_1\beta_1\delta_1\gamma_1$, 因为投射时并无变形. 所以

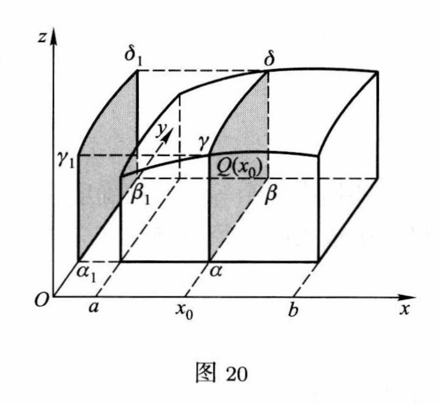


图 20

$$Q(x_0) = \text{面积 } \alpha\beta\delta\gamma = \text{面积 } \alpha_1\beta_1\delta_1\gamma_1,$$

但 yz 平面上曲线 $\gamma_1\delta_1$ 的方程显然是

$$z = f(x_0, y) \quad (c \leqslant y \leqslant d).$$

利用已知的曲线梯形的定积分表达式我们有

$$Q(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)dy.$$

既然这种论证是对任一截面而言的, 则一般地对 $a \leqslant x \leqslant b$ 恒有

$$Q(x) = \int_c^d f(x, y)dy^{①}.$$

将 $Q(x)$ 的值代入公式 (3), 得

$$V = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

但对体积 V 我们也有表达式 (2), 所以

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)dP = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy \tag{4}$$

—— 如此二重积分化成了累次积分.

同样的结果也可对这较一般的情形得出: xy 平面上的区域 (P) 是一个由两条曲线

$$y = y_0(x), \quad y = Y(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

及两条纵坐标线 $x = a$ 与 $x = b$ 所围的曲线梯形 (图 21). 与前面所考虑过的情形对比起来, 其差别在于: 以前是对任何固定的 $x = x_0, y$ 总在同一区间 $[c, d]$ 中变化, 而现在则 y 的变化区间

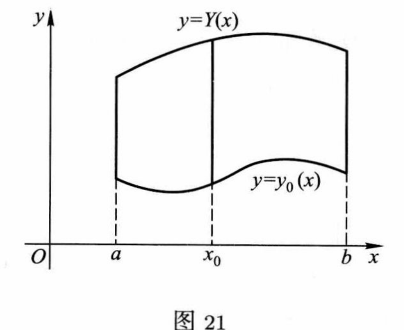


图 21

$$[y_0(x_0), Y(x_0)]$$

①这个 x 的函数也是连续的 [**296** 段], 这是我们在推导公式 (3) 时所作的假设.

本身也与 x_0 有关, 如此

$$Q(x_0)=\int_{y_0(x_0)}^{Y(x_0)} f(x_0,y)dy.$$

最后我们得出

$$V=\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP=\int_a^b dx\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy^{①}. \tag{5}$$

如此我们利用几何解释向读者介绍了二重积分的概念及其计算法.

338. 二重积分定义 现在由纯解析的观点对这问题作较一般的叙述. 但在此我们也并不回避几何或至少不回避几何的语言 [**124**—**127** 段]. 我们将说到所考虑的二元函数定义所在的 "二维区域", 用 "曲线" 将它分成小 "区域", 取这些 "区域" 的 "面积", 等等. 其实这乃是算术的二维空间中的 "区域" 及 "曲线", 它们的 "点" 无非就是数偶. 但平常所有这些所谓 "形象" 为便利起见就代以相应的真正的几何形象, 而不加什么区别. 特别是, 算术二维空间中的 "区域面积" 总是理解成相应几何区域的面积.

我们回忆一下, 要一个以某曲线为界的区域能求积, 其充要条件是要这边界曲线有等于 0 的面积 [**193** 段]. 这种曲线一大类是显式方程所表示的连续曲线或有限段这种曲线所组成的曲线; 特别是, 光滑或逐段光滑曲线也都具有这种性质 (我们不来证明了). 我们将始终假设区域 (P) 的边界以及将它划成小区域的曲线都具有零面积 (比如说, 属于刚才所说这一类); 这就可以保证我们所需要的面积全都存在.

现在我们回到事实上在 **336** 段已经讲过的二重积分概念并详细给出它的一般的定义.

设在区域 (P) 内定义了一个函数 $f(x,y)$②. 将区域 (P) 用曲线网划分为有限多个小区域 $(P_1),(P_2),\cdots,(P_n)$, 其面积为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$. 虽然比较简单的是设想这些小区域都是连通的, 但为以后讲起来省事起见还是不排除非连通的可能性好些. 在第 i 个小区域 (P_i) 内任取一点 (ξ_i,η_i), 将这点上的函数值 $f(\xi_i,\eta_i)$ 乘以相应小区域的面积 P_i 并将所有这类乘积加起来. 所得总和

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot P_i$$

就称为函数 $f(x,y)$ 在区域 (P) 内的积分和.

以 λ 表示小区域 (P_i) 的直径③的最大者. 于是在 $\lambda\to 0$ 时积分和 σ 的有限极限

$$I=\lim\sigma^{④}$$

①这里的内层积分还是 x 的连续函数 [参看 **299** 段].

②这里我们对它不作连续性的假设.

③所谓点集的直径是指该集合任意两点间距离的上确界而言. 由连续曲线所围的平面闭区域的直径就是它的最大弦的长.

④读者不难自己建立这个新极限的精确意义.

就叫做函数 $f(x,y)$ 在区域 (P) 中的二重积分并表示成记号

$$I=\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP.$$

有积分的函数称为可积函数.

339. 二重积分存在条件 被积函数必须是有界的. 事实上, 如其不然, 则将区域 (P) 以任一给定的方法分为小区域时, 可凭点 (ξ_i,η_i) 的选择使积分和任意变大, 如此就不能存在有限的极限 I 了.

因此我们考虑已知函数 $f(x,y)$ 的可积分条件时预先假设它是有界的:

$$m\leqslant f(x,y)\leqslant M.$$

与一元函数的情形一样, 这里也宜引入所谓达布下和及上和:

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_iP_i,\quad S=\sum_{i=1}^{n} M_iP_i,$$

这里 m_i 及 M_i 分别为函数 $f(x,y)$ 在区域 (P_i) 中的下确界及上确界.

在区域 (P) 的一定的划分之下, 无论点 (ξ_i,η_i) 如何选取, 恒有

$$s\leqslant\sigma\leqslant S.$$

但适当选取这些点可使 $f(\xi_i,\eta_i)$ 的值任意地接近于 m_i (或 M_i), 同时总和 σ 可任意地接近于 s (或 S). 如此, 达布下和及上和分别为相应于区域的同一划分的积分和的下确界及上确界.

对于达布和, 也如一维的情形一样, 可以建立下列性质.

第一性质 在增添一些新的分割线将小区域 (P_i) 作进一步划分时, 达布下和不减上和不增.

第二性质 每个达布下和都不超过每个上和, 即使它们相应于 (P) 的不同划分都是如此.

证明法与以前相似 [**177** 段]; 只是以前说分点的地方现在改说分割线.

但有一点希望读者注意. 在一维的情形每一新分点明显地将一个旧区间分成两个, 而两区间, 共同部分仍为一区间. 在平面上情形就复杂了, 因为两曲线可相交于很多的点 (甚至相交于无穷点集). 所以连通的小区域可能被新添的曲线分割成不连通的部分, 同样两个连通区域的共同部分也可以是不连通的区域. 这就是为什么我们一开头就不避免将基本区域分为不连通部分的原因.

其次, 建立确界

$$I_*=\sup\{s\},\quad I^*=\inf\{S\}$$

的存在, 并且有

$$s\leqslant I_*\leqslant I^*\leqslant S.$$

最后, 将一维情形的证明 [**178** 段] 逐字套过来就得出

定理 要二重积分存在, 其充要条件是

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0,$$

或写成

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i P_i=0, \tag{6}$$

这里 ω_i 是函数 $f(x,y)$ 在小区域 (P_i) 中的摆幅 M_i-m_i.

340. 可积函数类 用上面所建立的可积判定法不难证明:

I. 任何在区域 (P) 内连续的函数 $f(x,y)$ 都是可积的.

事实上, 如果函数 f 在 (闭) 区域 (P) 内连续, 则按一致连续的性质对每个 $\varepsilon>0$ 必有这样一个 $\delta>0$ 与之相应, 使在区域 (P) 的任何部分内, 只要直径小于 δ, 函数的摆幅就小于 ε. 现在设区域 (P) 分割成小区域 (P_i), 其直径全都小于 δ. 于是所有摆幅 $\omega_i<\varepsilon$, 而

$$\sum_i \omega_i P_i<\varepsilon\sum_i P_i=\varepsilon P,$$

由此条件 (6) 成立. 这就证明了该函数可积.

附注 现在已经不难给柱体体积公式 (2) 一个完全严密的推导. 这可以完全与推导曲线梯形的面积公式时用一样做法 [**196** 段] —— 引用内接体及外切体, 它们的体积可表示为达布和.

为了将可积分函数类作某些推广, 我们需要下面的引理.

引理 设在区域 (P) 内给了一条曲线 (L), 其面积为 0, 于是对每个 $\varepsilon>0$ 恒有一个 $\delta>0$ 与之相应, 使得只要区域 (P) 分割成直径全小于 δ 的部分, 则那些与 (L) 有公共点的部分的面积之和就小于 ε.

按假设曲线 (L) 可以被夹在一个面积小于 ε 的多边形区域 (Q) 内. 我们可使曲线 (L) 与该区域边界 (K) 无公共点. 于是两曲线上变点间的距离有一最小值 $\delta>0$.

事实上, 设该两连续曲线各由参变方程

$$(K)\ x=\varphi(t),\quad y=\psi(t);\quad (L)\ x=\varphi^*(u),\quad y=\psi^*(u)$$
$$t_0\leqslant t\leqslant T \qquad\qquad u_0\leqslant u\leqslant U$$

所给出, 而 $\varphi,\psi,\varphi^*,\psi^*$ 每个都是它的自变量的连续函数. 于是这些曲线的任意两点间的距离

$$\sqrt{[\varphi(t)-\varphi^*(u)]^2+[\psi(t)-\psi^*(u)]^2}$$

是 (t,u) 在闭矩形区域 $[t_0,T;u_0,U]$ 内的连续函数, 因此在那里面达到其最小值 [**136** 段]. 因为曲线不相交所以这个最小距离 δ 就异于 0.

现在我们将区域 (P) 任意划分为小区域, 使其直径小于 δ. 那些碰到曲线 (L) 的小区域必须整个落在区域 (Q) 里, 所以其总面积小于 ε.

II. 如果有界函数 $f(x,y)$ 至多在有限条面积为 0 的曲线上有不连续点, 则它必可积分.

任意给定一数 $\varepsilon > 0$. 按假设函数 $f(x,y)$ 的所有 "不连续线" 可以被包含在一个总面积小于 ε 的多边形区域 (Q) 内. 在图 22 上这区域用阴影标出. 它的边界是有限多条折线 (L), 其面积显然等于 0.

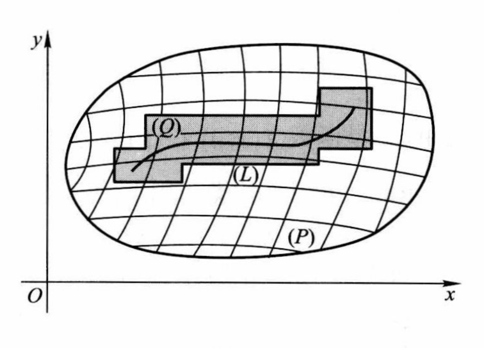


图 22

在由 (P) 中除出区域 (Q) 内部后所得的闭区域里, 函数 $f(x,y)$ 处处连续, 也就是说一致连续. 所以, 给定一个 $\varepsilon > 0$, 就可找到这样一个 $\delta_1 > 0$, 使在这区域的每个直径小于 δ_1 的部分里函数 $f(x,y)$ 的摆幅 $< \varepsilon$.

现在由引理也可找到一个数 $\delta_2 > 0$, 使得只要区域 (P) 用任意的曲线分为直径小于 δ_2 的小区域时, 其中至少碰到所有折线 (L) (即被除外的多边形区域 (Q) 的边界) 之一的各小区域面积之和必小于 ε.

设 δ 是 δ_1, δ_2 中较小的一个. 将区域 (P) 分割为 $(P_1), (P_2), \cdots, (P_n)$ 等部分使其直径均小于 δ, 并考虑相应的和

$$\sum_i \omega_i P_i.$$

将此和拆成两个:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''},$$

其中指标 i' 相应于整个落在所除出的区域 (Q) 外面的那些区域 $(P_{i'})$, 而 i'' 相应于所有其余的. 我们分别来估计每个和.

因为所有 $(P_{i'})$ 都在由 (P) 除去 (Q) 所得的区域里, 并且其直径 $< \delta \leqslant \delta_1$, 故所有 $\omega_{i'} < \varepsilon$, 如此

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} P_{i'} < \varepsilon P.$$

另一方面, 如果以 Ω 表示函数 $f(x,y)$ 在全区域 (P) 中的摆幅, 则有 (因 $\omega_i \leqslant \Omega$)

$$\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} \leqslant \Omega \sum_{i''} P_{i''}.$$

这里 $\Sigma P_{i''}$ 是小区域 (P_i) 中那些小区域的总面积: 1) 或者它整个落在所除外的区域 (Q) 里, 2) 或者它碰到这区域的边界 (L). 前者总面积小于 ε, 因为 $Q < \varepsilon$; 后者总面

积也如此, 因为区域分成了直径 $<\delta\leqslant\delta_2$ 的小区域. 所以 $\Sigma P_{i''}<2\varepsilon$, 从而

$$\sum_{i''}\omega_{i''}P_{i''}<2\Omega\varepsilon.$$

最后在 $\lambda<\delta$ 时有

$$\sum_{i}\omega_i P_i<(P+2\Omega)\varepsilon.$$

因为这个不等式右边随着 ε 可小到任何程度, 故条件 (6) 成立, 如此等等.

341. 可积函数及二重积分的性质 1°. 如果将一个区域 (P) 中的可积函数 $f(x,y)$ 沿该区域中某面积为 0 的曲线 (L) 上以任意方式改变其函数值 (条件只是要改变后该函数仍保持有界), 则仍得一在 (P) 中可积的函数, 且其积分即等于 $f(x,y)$ 的积分.

证明时须做出改变后的及原来的函数的积分和. 它们的差别只在碰到曲线 (L) 的那些区域上的项. 但按 **340** 段的引理, 这些区域的总面积在 $\lambda\to 0$ 时趋于 0, 由此已可断言两积分和趋于同一极限.

如此, 二重积分的存在与大小不受被积函数沿有限数条零面积曲线上所取之值的影响.

2°. 如果函数 $f(x,y)$ 的定义域 (P) 被一条零面积曲线 (L) 分为两个区域 (P') 和 (P''), 则函数 $f(x,y)$ 只要在全区域 (P) 上可积, 在分区域 (P') 和 (P'') 上也就可积, 反之, 只要在分区域 (P') 和 (P'') 上可积, 在全区域 (P) 上也就可积. 同时

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP=\iint\limits_{(P')} f(x,y)dP'+\iint\limits_{(P'')} f(x,y)dP''.$$

将区域 (P') 及 (P'') 任意分为小区域, 则 (P) 也跟着分成了小区域:

$$(P_1),(P_2),\cdots,(P_n).$$

如果指标 i' 属于 (P') 中各小区域, 而指标 i'' 属于 (P'') 中各小区域, 则

$$\sum\omega_i P_i=\sum\omega_{i'}P_{i'}+\sum\omega_{i''}P_{i''}.$$

设函数 $f(x,y)$ 在 (P) 中可积, 如此在 $\lambda\to 0$ 时上式左边的和趋于 0; 于是右边的每个和也更不成问题都趋于 0, 如此该函数在 (P') 中及 (P'') 中也可积分.

反之, 如果该函数在 (P') 中及 (P'') 可积, 如此 $\lambda\to 0$ 时右边两个和都趋于 0, 则左边的和也趋于 0. 但要记得, 这个和不是对区域的任意分法得来: 我们原是将区域 (P') 及 (P'') 分别进行分割的.

要由区域 (P) 的任意分法变成这种特殊的分法, 只要在分割线上添加曲线 (L), 其相应和的差别只在相应于与曲线 (L) 接触的诸小区域的各项. 但按 **340** 段的引理,

其总面积在 $\lambda \to 0$ 时趋于 0, 因而两和相差一无穷小. 如此, 条件 (6) 完全实现, 而函数 $f(x,y)$ 在 (P) 上可积分.

最后, 所求证的公式只要令 $\lambda \to 0$ 而对等式

$$\sum f(\xi_i,\eta_i)P_i = \sum f(\xi_{i'},\eta_{i'})P_{i'} + \sum f(\xi_{i''},\eta_{i''})P_{i''}$$

取极限即可得出.

同样, 利用积分和并加上极限过程也可得出下列三条性质:

3°. 如果将 (P) 内可积函数 $f(x,y)$ 乘以常数 k, 则所得函数也可积, 并且

$$\iint\limits_{(P)} kf(x,y)dP = k\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP.$$

4°. 如果函数 $f(x,y)$ 及 $g(x,y)$ 在区域 (P) 内可积, 则函数 $f(x,y) \pm g(x,y)$ 也可积, 并且

$$\iint\limits_{(P)} [f(x,y) \pm g(x,y)]dP = \iint\limits_{(P)} f(x,y)dP \pm \iint\limits_{(P)} g(x,y)dP.$$

5°. 如果函数 $f(x,y)$ 及 $g(x,y)$ 在 (P) 内可积而且 $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, 则

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP \leqslant \iint\limits_{(P)} g(x,y)dP.$$

还有,

6°. 如果函数 $f(x,y)$ 可积, 则函数 $|f(x,y)|$ 也可积, 并且有

$$\left|\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP\right| \leqslant \iint\limits_{(P)} |f(x,y)|dP.$$

函数 $|f|$ 的可积可由一点简单的说明推出: 该函数在任何区域 (P_i) 中的摆幅 ω_i^* 不超过相应的函数 f 的摆幅 ω_i. 事实上, 这时候

$$\sum \omega_i^* P_i \leqslant \sum \omega_i P_i,$$

而第二和趋于 0 时第一和也就趋于 0.

所求证的不等式就可以由不等式

$$\left|\sum f(\xi_i,\eta_i)P_i\right| \leqslant \sum |f(\xi_i,\eta_i)|P_i$$

取极限得出.

7°. 如果函数 $f(x,y)$ 在 (P) 内可积并且满足

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M,$$

则

$$mP \leqslant \iint\limits_{(P)} f(x,y)dP \leqslant MP. \tag{7}$$

这可由明显的不等式

$$mP \leqslant \sum f(\xi_i,\eta_i)P_i \leqslant MP$$

取极限得出.

如果以 P 除不等式 (7) 各项:

$$m \leqslant \frac{\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP}{P} \leqslant M$$

并以 μ 表示中间的比率, 则得不等式 (7) 的另一写法

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP = \mu P \quad (m \leqslant \mu \leqslant M), \tag{8}$$

它表示所谓中值定理.

现在特别假设函数 $f(x,y)$ 在 (P) 内连续, 并取 m 及 M 作其在区域 (P) 内的最小值及最大值. 按魏尔斯特拉斯定理它们是存在的 [**136** 段]. 于是, 按著名的波尔查诺 – 柯西定理 [**134** 段], 连续函数 $f(x,y)$ 如取 m 及 M 两值, 也就应该遍取其中间的每个值. 如此, 在区域 (P) 内应该总能找到这样一点 $(\overline{x},\overline{y})$, 使 $\mu = f(\overline{x},\overline{y})$, 而公式 (8) 就成为:

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP = f(\overline{x},\overline{y}) \cdot P. \tag{9}$$

这是中值定理的最有用的形式.

同样, 也不难将推广的中值定理 [**182** 段, 10°] 搬到当前的情形上来; 这请读者自己去做.

342. 积分作为可加性区域函数 · 对区域的微分法 我们来看一个平面 (闭) 区域 (P) 及其中所包含的 (闭) 小区域 (p). 假设所有区域全是可求积的 (有时还可加上一些别的限制). 如果对区域 (P) 的每个小区域 (p) 都有一个一定的数

$$\Phi = \Phi((p))$$

与之相应, 则由此对那些 (p) 定义了一个 "区域函数".

这种区域函数的实例有: 区域的面积, 沿区域连续分布的质量, 这种质量的静矩, 连续分布的负荷或一般地加于区域上的力, 等等.

如果将区域 (p) 分解为互不交叠的部分

$$(p) = (p') + (p'')$$

时恒有

$$\Phi((p)) = \Phi((p')) + \Phi((p'')),$$

则区域函数 $\Phi((p))$ 称为可加的. 所有上面所举各例中的函数都具有这种可加的性质. 可加区域函数是特别重要的, 因为在研究自然现象时常常会遇到.

设在可求积区域 (P) 中给定了一个可积分点函数 $f(M) = f(x, y)$; 于是它在该区域的任何小区域 (p) 中也可积分, 如此积分

$$\Phi((p)) = \iint\limits_{(p)} f(x, y)dP \tag{10}$$

也是区域 (p) 的函数. 由 **341** 段, 2° 它显然也是可加函数.

现在来讨论 "函数 $\Phi((p))$ 对区域的微分法". 设 M 是区域 (p) 的一个定点, 而 (p) 是任一包含该点的小区域. 比率

$$\frac{\Phi((p))}{p},$$

其中 p 是区域 (p) 的面积 —— 在区域 (p) 的直径趋于 0 时的有限极限称为函数 $\Phi((p))$ 在点 M 对区域的导数. 例如, 如果 $\Phi((p))$ 是沿平面图形 (p) 连续分布的质量, 则 $f(M)$ 无非是质量在点 M 的分布密度; 如果 $\Phi((p))$ 表示加于图形 (p) 上的力, 则 $f(M)$ 表示在点 M 的压强, 等等.

特别令人感兴趣的是区域函数由 (10) 式所表出的积分时的情形, 这里 $f(x, y)$ 是一个在区域 (P) 内连续的函数. 我们来证明, 一个积分在点 M 对区域的导数就是被积函数在该点的函数值, 即

$$f(M) = f(x, y).$$

事实上, 取一个在导数定义中所说的区域 (p), 则按中值定理 [参看 (9)] 有

$$\Phi((p)) = f(\overline{x}, \overline{y}) \cdot p,$$

这里 $(\overline{x}, \overline{y})$ 是区域 (p) 中某一点. 如果区域 (p) 的直径趋于 0, 则点 $(\overline{x}, \overline{y})$ 就无限地接近于 (x, y), 而按连续性有

$$\frac{\Phi((p))}{p} = f(\overline{x}, \overline{y}) \to f(x, y),$$

这就是所求证的.

附注 前面我们已经谈到过可加区间函数 [**204** 段]. 因为这种函数总是某一点函数的两个值之差, 所以对 "线性的" 情形没有必要像前面所讲对 "平面的" 情形那样来发展其理论. 但在定积分对变上限的微分法定理中 [**183** 段, 12°] 读者不难看出与刚才所证的关于二重积分对区域的微分法定理相似之处.

§2. 二重积分的计算

343. 化矩形区域上的二重积分为累次积分 这个问题我们在 **337** 段已经用几何解释并在某些特殊假设之下谈到过了.

现在我们用解析工具并且以最一般的形式来讨论它; 首先由积分区域为矩形 $[a,b;c,d]$ 时这一简单情形开始.

定理 *如果对定义在矩形* $(P)=[a,b;c,d]$ *内的函数* $f(x,y)$ *存在二重积分*

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP \tag{1}$$

而且对在 $[a,b]$ *内每一常数值* x *存在单积分*

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)dy \quad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{2}$$

则也存在累次积分

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \tag{3}$$

并且等式

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP=\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy^{①} \tag{4}$$

成立.

证明 将确定矩形 (P) 的区间 $[a,b]$ 及 $[c,d]$ 用分点

$$x_0=a<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b,$$
$$y_0=c<y_1<\cdots<y_k<y_{k+1}<\cdots<y_m=d$$

分为一些小段, 于是矩形 (P) 被分割成一些小矩形 (图 23):

$$(P_{i,k})=[x_i,x_{i+1};y_k,y_{k+1}] \quad (i=0,1,\cdots,n-1;k=0,1,\cdots,m-1).$$

---

①读者不难看出这一断言就是关于二重极限及累次极限的熟悉定理 [**131** 段] 的一种变形.

以 $m_{i,k}$ 及 $M_{i,k}$ 表示函数 $f(x,y)$ 在矩形 $(P_{i,k})$ 中的下确界及上确界, 如此对此矩形中所有的点 (x,y) 有

$$m_{i,k} \leqslant f(x,y) \leqslant M_{i,k}.$$

在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 内任意固定 x 的值 $x = \xi_i$ 并对 y 由 y_k 至 y_{k+1} 实行积分而有 [**182** 段, 8°]

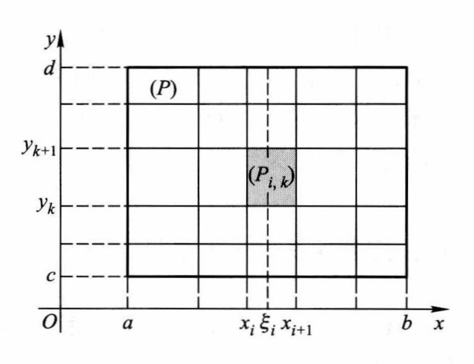


图 23

$$m_{i,k}\Delta y_k \leqslant \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)dy \leqslant M_{i,k}\Delta y_k,$$

这里 $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$; 对 y 的积分是存在的, 因为已假设积分 (2) 沿全区间 $[c,d]$ 是存在的. 把这类不等式对 k 由 0 至 $m-1$ 加起来, 得

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta y_k \leqslant I(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y)dy \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k}\Delta y_k.$$

如以 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ 遍乘此不等式各端并且对指标 i 由 0 至 $n-1$ 求和, 则得

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta y_k \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k}\Delta y_k.$$

在上式中间我们得到了函数 $I(x)$ 的积分和. 而两头则无非是二重积分 (1) 的达布和 s 及 S. 事实上, 因为 $\Delta x_i \Delta y_k$ 是矩形 $(P_{i,k})$ 的面积 $P_{i,k}$, 故我们有, 比如说,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta y_k = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta x_i \Delta y_k = \sum_{i,k} m_{i,k} P_{i,k} = s.$$

如此, 最后得出

$$s \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i \leqslant S.$$

如果现在令所有 Δx_i 及 Δy_k 同时趋于 0, 则由二重积分 (1) 的存在, 两和 s 及 S 将趋于该积分为极限. 在这情形就有

$$\lim \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i = \iint\limits_{(P)} f(x,y)dP,$$

即二重积分 (1) 同时也就是函数 $I(x)$ 的积分:

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy,$$

这就是所求证的.

对调变量 x 与 y 的地位, 则与 (4) 同样还可证明公式

$$\iint_{(P)} f(x,y)dP = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx, \tag{4*}$$

但这里假设 $y=$ 常数时积分

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

存在.

附注 如果连同二重积分 (1) 还存在下列两个单积分:

$$\int_c^d f(x,y)dy \quad (x \text{ 为常数}) \quad 及 \quad \int_a^b f(x,y)dx \quad (y \text{ 为常数}),$$

则同时成立公式 (4) 及 (4*), 由此有

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx. \tag{5}$$

应用公式 (4) 或 (4*) 要以二重积分及一个单积分的存在为条件. 如果函数 $f(x,y)$ 连续 (这是在实际上通常遇到的情形), 则所有上述积分都保证是存在的. 在这情形上述两公式随便哪个都可用来作二重积分的实际计算, 因为单积分计算起来要容易得多.

在证明公式 (4) 时比较自然的是将矩形 (P) 用平行坐标轴的直线分割为有面积 $\Delta x_i \Delta y_k$ 的矩形元素. 为了使二重积分符号本身能表现出它是用平行于坐标轴的直线分割积分区域得出的, 我们将

$$\iint_{(P)} f(x,y)dP$$

写成

$$\iint_{(P)} f(x,y)dxdy \left[\text{或} \iint_{(P)} f(x,y)dydx\right].$$

此外, 既然矩形 $(P)=[a,b;c,d]$ 内的二重积分可化为累次积分, 故二重积分本身也就常常用与累次积分相似的记号来表示:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \quad \text{或} \quad \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

在这记号 "外层的积分" 与 "外层的微分" 相应, 如此只要插入括号就可得出一个累次积分:

$$\int_a^b \left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\} dx \quad \text{或} \quad \int_c^d \left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\} dy.$$

例 1) $I=\int_0^1\int_0^1\frac{ydxdy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
比较简单的是按公式 (4) 将 I 表示成:

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{ydy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

因为我们可以立即得出

$$\int_0^1\frac{ydy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}},$$

如此

$$I=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+2}}\bigg|_0^1=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

如果采取另一累次积分公式, 则求积稍为复杂一点:

$$I=\int_0^1 ydy\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{1+y^2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}},$$

$$I=\int_0^1\frac{ydy}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2+y^2}-1}{\sqrt{2+y^2}+1}\bigg|_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}.$$

不难将这答案化为前面的形式.

2) 试求这样一个立体的体积 V: 它下面以 xy 平面为界, 侧面以平面 $x=0, x=a, y=0, y=b$ 为界, 而上面以椭圆抛物面

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$$

为界.

首先按公式 (2) 有

$$V=\iint\limits_{[0,a;0,b]}\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dP.$$

这积分可按公式 (4*) 来计算:

$$V=\int_0^b dy\int_0^a\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx=\int_0^b\left(\frac{a^3}{6p}+\frac{ay^2}{2q}\right)dy=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right).$$

344. 化曲线区域上二重积分为累次积分 我们来考虑一个区域 (P), 其上下以两连续曲线

$$\begin{aligned}y&=y_0(x),\\ y&=Y(x)\end{aligned}\qquad(a\leqslant x\leqslant b)$$

为界, 两侧则以两纵坐标线 $x=a$ 及 $x=b$ 为界 (图 24). 于是, 与 **343** 段的定理相似, 我们有

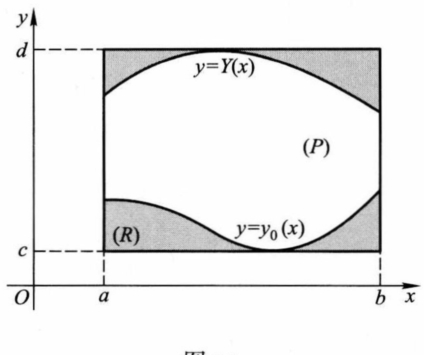


图 24

定理 如果对定义于区域 (P) 内的函数 $f(x,y)$ 存在二重积分

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP$$

并且对 $[a,b]$ 内每一固定 x 值存在单积分

$$I(x)=\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy,$$

则也存在累次积分

$$\int_a^b dx\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy,$$

并且等式:

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP=\int_a^b dx\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy \tag{6}$$

成立.

证明 在于将这情形化为 **343** 段中的情形. 即将区域 (P) 包容在矩形

$$(R)=[a,b;c,d]$$

内, 令 $c=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} y_0(x), d=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} Y(x)$ (图 24), 而在此矩形中定义一个函数 $f^*(x,y)$ 如下:

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & \text{如点 } (x,y) \text{ 属于区域 } (P),\\ 0, & \text{在矩形 } (R) \text{ 其余点上}. \end{cases}$$

我们来证明这个函数满足定理 **343** 的条件.

首先, 它在区域 (P) 内是可积的, 因为这里它与所设可积函数 $f(x,y)$ 重合; 所以显然有

$$\iint\limits_{(P)} f^*(x,y)dP=\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP.$$

另一方面, 在 (P) 外 $f^*(x,y)=0$, 所以在矩形 (R)[①] 的剩下部分 $(Q)=(R)-(P)$ 内也可积, 并且

$$\iint\limits_{(Q)} f^*(x,y)dQ=0.$$

①在这区域边界上的值不起作用 [参看 **341** 段, 1°].

于是, 由 **341** 段, 2°, 函数 f^* 在全矩形 (R) 中可积, 并且

$$\iint\limits_{(R)} f^*(x,y)dR = \iint\limits_{(P)} f(x,y)dP. \tag{7}$$

在 x 取 $[a,b]$ 内定值时积分

$$\int_c^d f^*(x,y)dy = \int_c^{y_0(x)} f^*dy + \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*dy + \int_{Y(x)}^d f^*dy$$

存在, 因为左边三个积分都是存在的. 事实上, 因为在 y 变化区间 $[c, y_0(x)]$ 及 $[Y(x), d]$ 内函数 $f^*(x,y)=0$, 所以第一个及第三个积分都存在且等于 0. 第二个积分则与函数 $f(x,y)$ 的积分相同:

$$\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*(x,y)dy = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy,$$

因为对 $[y_0(x), Y(x)]$ 内的 $y, f^*(x,y)=f(x,y)$. 最后,

$$\int_c^d f^*(x,y)dy = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy. \tag{8}$$

由上述定理, 函数 f^* 的累次积分存在, 并且它就等于二重积分 [参看 **343** 段, (4)]:

$$\iint\limits_{(R)} f^*(x,y)dR = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x,y)dy.$$

注意到公式 (7) 与 (8), 可以看出这公式就等价于公式 (6).

如果区域 (P) 是另一型以曲线

$$x = x_0(y), \quad x = X(y) \quad (c \leqslant y \leqslant d)$$

及直线 $y=c, y=d$ 为界的曲边梯形, 则公式 (6) 将换成

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP = \int_c^d dy \int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x,y)dx, \tag{6*}$$

这里假设, 除存在二重积分外, 在 y 为常数时还存在对 x 的单积分.

附注 如果区域 (P) 的界线只与纵坐标轴及横坐标轴的平行线相交于两点 (例如像在图 25 所表示的情形), 则在前述条件下该两公式都可应用. 两式结合起来得出等式

$$\int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x,y)dx, \tag{9}$$

它具有独立的意义. 这与 **343** 段公式 (5) 相类似.

如果函数 $f(x,y)$ 在区域 (P) 内连续, 则二重积分与单积分都存在, 并且可用公式 (6) 或 (6*) (看区域 (P) 的类型而定) 来计算二重积分.

在边界较复杂的情形通常将区域 (P) 分割为有限多个所讨论过的类型的部分. 例如, 图 26 上的图形 (P) 用直线 $x=\alpha$ 分成了三个这样的部分: $(P_1),(P_2),(P_3)$. 于是所求的积分由 **341** 段, 2° 也就表示为这些部分区域上各个积分之和. 每个都可按已讲过的办法算出.

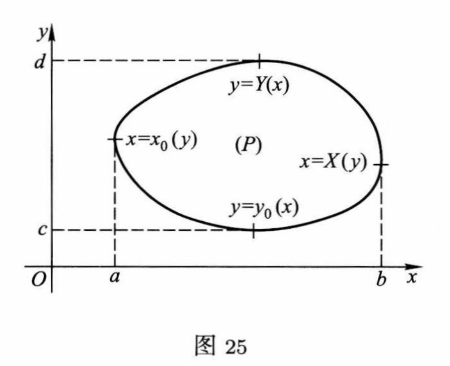


图 25

图 26

因为在一般的情形, 我们将问题化为 **343** 段的定理, 故论证的基础仍是将所考虑的图形分成矩形元素. 故此时二重积分同样常常用记号

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$$

来表示; 乘积 $dxdy$ 象征矩形元素的面积.

下列记号的意义不待解释也就自然明白了:

$$\int_a^b\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f dydx \quad 或 \quad \int_c^d\int_{x_0(y)}^{X(y)} f dxdy.$$

例 1) 计算二重积分

$$I=\iint\limits_{(P)} y^2\sqrt{R^2-x^2}dP,$$

这里 (P) 是一个圆, 其半径为 R, 圆心在坐标原点 (图 27).

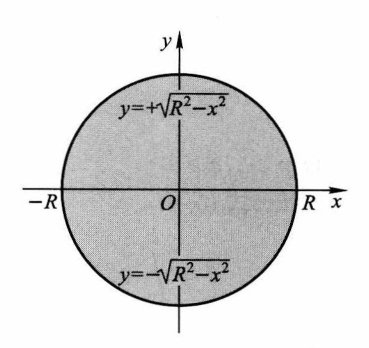


图 27

解 区域 (P) 的边界有方程 $x^2+y^2=R^2$, 故 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$. 显然 $y=+\sqrt{R^2-x^2}$ 是上半个圆的方程, $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ 是下半个圆的方程. 如此, x 取区间 $[-R,R]$ 内一固定值时 y 由 $-\sqrt{R^2-x^2}$ 变至 $+\sqrt{R^2-x^2}$. 依据公式 (6) 并注意被积函数是 y 的偶函数, 我们有

$$I=\int_{-R}^{R}dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} y^2\sqrt{R^2-x^2}dy=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2dy.$$

算出内层的积分:

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy = \frac{1}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

然后 (仍考虑到偶函数的性质) 有

$$I = \frac{2}{3}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)^2 dx = \frac{4}{3}\int_0^R (R^2-x^2)^2 dx = \frac{32}{45}R^5.$$

同样也可用公式 (6*) 来计算.

2) 计算积分

$$I = \iint \sqrt{4x^2-y^2}dxdy,$$

积分区域是一个三角形, 由直线 $y=0, x=1, y=x$ 所构成.

解 按公式 (6)

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{4x^2-y^2}dy;$$

内层积分

$$\int_0^x \sqrt{4x^2-y^2}dy = \frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2} + 2x^2 \arcsin\frac{y}{2x}\Big|_{y=0}^{y=x} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)x^2,$$

而结果是

$$I = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right).$$

计算本也可按公式 (6*) 来做, 但这样会碰到较难的积分. 在选择计算途径时应经常估计到这种情况.

3) 计算积分

$$I = \iint\limits_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}dxdy,$$

假设 $p \geqslant 1, q \geqslant 1$①.

按公式 (5) 有

$$I = \int_0^1 x^{p-1}dx \int_0^{1-x} y^{q-1}dy = \frac{1}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx = \frac{1}{q}\mathrm{B}(p, q+1).$$

结果:

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}dxdy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}.$$

这公式属于狄利克雷.

4) 在 $p<1$ (或 $q<1$) 的情形该被积函数于 $x=0$ 而 $0<y\leqslant 1$ 时 (或 $y=0$ 而 $0<x\leqslant 1$ 时) 变成无穷大. 寻常的定积分定义在此已不适用: 积分成了"反常的"而其确定需要补充的极限

①在此加这限制只是为了使被积函数不致变成无穷大; 下面 4) 里这限制将减弱.

过程. 我们就以所考虑的例子来说明这一点, 在此假设 $0 < p < 1$ 且 $0 < q < 1$. 先取下列积分 ($\varepsilon > 0$):

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant\varepsilon,y\geqslant\varepsilon\\x+y\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}dxdy = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^{p-1}dx\int_{\varepsilon}^{1-x} y^{q-1}dy$$

$$= \frac{1}{q}\left[\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^{p-1}(1-x)^q dx - \varepsilon^q\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^{p-1}dx\right].$$

如果现在令 ε 趋于 0 (即压缩图 28 上用来隔离 "奇线" 的阴影窄条), 则在求极限时仍得出 $\dfrac{1}{q}\mathrm{B}(p, q+1)$. 这极限就是所求的反常积分.

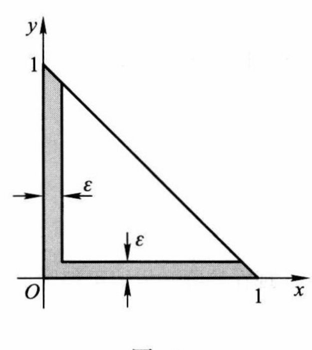


图 28

附注 在一般情形, 当被积函数在个别 ("奇") 点上或沿某些 ("奇") 线变成无穷大时则用一些邻域将它们分出, 对这些邻域以外的区域算出积分, 然后取极限而将所说邻域压缩成点或线. 如果有限极限存在, 则它就给出反常积分的值.

用同样方式可构成无穷区域上的 "反常" 积分概念: 先对有限区域考虑正常积分, 然后扩充这区域使逐步包括无穷区域的全部点; 补充的极限过程就是由此而来.

如果被积函数是正的, 则选择何种方式压缩 "奇" 点和 "奇" 线的邻域或扩充有限区域是没有关系的.

345. 力学上的应用 一切几何上的及力学上的量, 只要是有关沿某图形 (P) 的平面连续分布质量的并且表示可加区域函数的, 原则上都可表示为该图形上的二重积分.

这里我们打算简略指出通常如何得出这类公式, 此中思考路线与应用单重定积分时一样 [**204** 段].

取出图形 (P) 的一个元素部分而作一能使计算简化的假设, 例如整个元素的质量都集中在一点上或者质量的分布密度在该元素范围里是常数, 这就能使所求量 Q 的元素 dQ 近似地表示为

$$dQ = q(M)dP,$$

误差是比 dP 高阶的无穷小, 于是 Q 的精确值可以公式

$$Q = \iint\limits_{(P)} q(M)dP$$

表出.

这公式可以, 比如说, 这样建立 [参看 **204** 段]. 将元素 dQ 的近似式加起来就能以积分和形式得出量 Q 的近似值, 而取极限即得 Q 的精确值, 后者已经是和的极限形式, 也即积分的形式.

设质量沿区域 (P) 连续分布, 并且在点 $M(x, y)$ 的 (表面) 密度设为

$$\rho(M) = \rho(x, y).$$

不难了解, 此时质量的元素就是

$$dm = \rho dP,$$

如此全质量就由积分

$$m = \iint_{(P)} \rho dP \tag{10}$$

表出.

其次, 对坐标轴的静矩元素及惯性矩元素为

$$dK_x = ydm = y_\rho dP, \quad dK_y = xdm = x_\rho dP,$$
$$dI_x = y^2 dm = y_\rho^2 dP, \quad dI_y = x^2 dm = x_\rho^2 dP.$$

由此立即得出这些矩本身是:

$$\left.\begin{aligned} K_x = \iint_{(P)} y_\rho dP, \quad K_y = \iint_{(P)} x_\rho dP, \\ I_x = \iint_{(P)} y_\rho^2 dP, \quad I_y = \iint_{(P)} x_\rho^2 dP. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

现在按寻常方式可得图形质心坐标如下:

$$\xi = \frac{\displaystyle\iint_{(P)} x_\rho dP}{m}, \quad \eta = \frac{\displaystyle\iint_{(P)} y_\rho dP}{m}. \tag{12}$$

在图形均匀时, $\rho =$ 常数, 这些公式就简化为

$$\xi = \frac{\displaystyle\iint_{(P)} xdP}{P}, \quad \eta = \frac{\displaystyle\iint_{(P)} ydP}{P}. \tag{13}$$

在个别简单情形用二重积分也可解决有关立体的, 比如说关于柱体的类似问题.

设给了这样一个柱体, 它由曲面 $z = z(x, y)$, 该曲面在 xy 平面上的投影 (P) 及母线平行于 z 轴的投射柱面所围成. 如果, 比如说, 要决定均匀柱体的静矩 K_{xy} (为简单起见假设体积密度等于 1), 则我们设想这柱体由一系列以 dP 为底以 z 为高的细竖条所组成. 竖条对 xy 平面的静矩等于其质量或 —— 在当前情形也就是 —— 体积 zdP, 乘以其质心与此平面的距离, 即乘以 $\frac{1}{2}z$. 所以静矩元素为

$$dK_{xy} = \frac{1}{2} z^2 dP,$$

由此对全体竖条求和即得

$$K_{xy} = \frac{1}{2} \iint_{(P)} z^2 dP. \tag{14}$$

同样可建立公式

$$K_{zx} = \iint_{(P)} yzdP, \quad K_{yz} = \iint_{(P)} xzdP. \tag{14a}$$

由此不难得出柱体质心 ξ, η, ζ 的坐标

$$\xi = \frac{K_{yz}}{V} = \frac{\displaystyle\iint_{(P)} xzdP}{V}, \quad 等等.$$

同样也可推出柱体对 z 轴的惯性矩 I_z 的公式及对坐标面 yz, zx 的惯性矩 I_{yz}, I_{zx} 的公式:

$$I_z = \iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)zdP, \quad I_{zx} = \iint\limits_{(P)} y^2 zdP, \quad I_{yz} = \iint\limits_{(P)} x^2 zdP, \tag{15}$$

由此显然 $I_z = I_{zx} + I_{yz}$.

如果质量分布的空间密度 ρ 是 z 的函数, 则二重积分已经不够了而需要用到三重积分 [参看 **379** 段].

例 1) 求均匀椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

包含在第一卦限中这一部分的质心 (图 29).

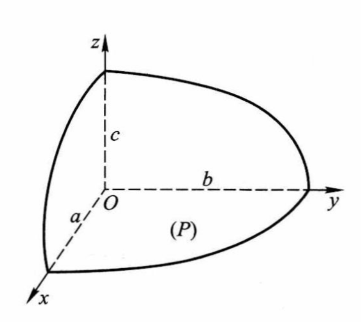


图 29

解 区域 (P) 是由两坐标轴及椭圆弧

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

围成, 椭球体表面的显式方程是

$$z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

按公式 (14)

$$\begin{aligned} K_{xy} &= \frac{1}{2}c^2\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy \\ &= \frac{bc^2}{3a^3}\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{\pi}{16}abc^2. \end{aligned}$$

同样

$$K_{yz} = \frac{\pi}{16}a^2bc, \quad K_{zx} = \frac{\pi}{16}ab^2c.$$

同时体积

$$V = \frac{\pi}{6}abc,$$

如此

$$\xi = \frac{3}{8}a, \quad \eta = \frac{3}{8}b, \quad \zeta = \frac{3}{8}c.$$

2) 求均匀椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

对坐标平面的惯性矩.

解 不妨将椭球体限于一个卦限而将结果乘以 8. 在这情形区域 (P) 就是椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$$

的一个象限.

我们有

$$I_{zx}=8\iint\limits_{(P)}y^2zdP=\frac{8c}{a}\int_0^b y^2dy\int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\sqrt{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)-x^2dx}$$

$$=2\pi ac\int_0^b y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\frac{4}{15}\pi ab^3c.$$

同样

$$I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc,\quad I_{xy}=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

§3. 格林公式

346. 格林公式的推导 本段中我们要来建立一个表示二重积分与线积分之间的关系的重要公式.

我们来看区域 (D), 它是一个曲边梯形 (图 30), 其界线 (L) 由曲线

$$\begin{aligned}&(PQ): y=y_0(x),\\&(SR): y=Y(x)\end{aligned}\qquad(a\leqslant x\leqslant b)$$

及两条平行于 y 轴的线段 PS 及 QR 所组成.

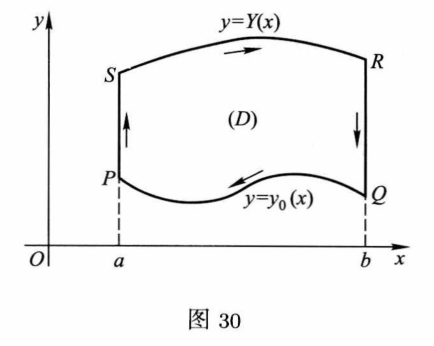


图 30

我们假设在区域 (D) 中给了一个函数 $P(x,y)$, 它连同其导函数 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 都是连续的.

按 **344** 段公式 (6) 计算二重积分

$$\iint\limits_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy,$$

我们得出

$$\iint\limits_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b dx\int_{y_0(x)}^{Y(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy.$$

这里内层积分不难借助原函数 $P(x,y)$ 算出, 即:

$$\int_{y_0(x)}^{Y(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy=P(x,y)\Big|_{y=y_0(x)}^{y=Y(x)}=P(x,Y(x))-P(x,y_0(x)).$$

如此,

$$\iint\limits_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b P(x,Y(x))dx-\int_a^b P(x,y_0(x))dx;$$

后面两个积分都可改写成线积分. 事实上, 按 **331** 段公式 (7) 可看出

$$\int_a^b P(x,Y(x))dx = \int_{(SR)} P(x,y)dx,$$

$$\int_a^b P(x,y_0(x))dx = \int_{(PQ)} P(x,y)dx.$$

由此有

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{(SR)} P(x,y)dx - \int_{(PQ)} P(x,y)dx$$

$$= \int_{(SR)} P(x,y)dx + \int_{(QP)} P(x,y)dx.$$

为了考虑沿区域 (D) 全界线 (L) 的积分, 我们在所得等式右边还添加积分

$$\int_{(PS)} P(x,y)dx \quad \text{和} \quad \int_{(RQ)} P(x,y)dx,$$

它们显然等于 0, 因为线段 (PS) 及 (RQ) 是与 x 轴垂直的 [参看 **331** 段]. 我们得

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{(PS)} Pdx + \int_{(SR)} Pdx + \int_{(RQ)} Pdx + \int_{(QP)} Pdx.$$

这等式右边是一个沿区域 (D) 闭界线 (L) 全部所取的积分, 但依循负的方向. 按沿闭路线积分表示法的规定 [**332** 段] 我们最后可将所得公式写成这样:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{(L)} P(x,y)dx. \tag{1}$$

虽然这个公式是假设坐标轴取右定向法推出的, 但不难看出它在左定向法之下仍保持不变 (只是回绕界线的正向反过来了).

我们至今都假设图形 (D) 是图 30 所表示的那种 "曲边梯形" 并且公式 (1) 只对这种区域证明是正确的. 事实上该公式对较复杂的区域也成立, 界线不妨由几条曲线组成. 只要假设图形 (D) 可用平行于 y 轴的直线分成有限多个上述那种 "曲边梯形" [例如参看图 26]. 对每个这种梯形分别写出像 (1) 式的公式而将这些等式两边加起来. 左边得一个二重积分, 展布在全区域 (D) 上, 右边则为沿所有各部分界线所取诸积分之和. 但右边可化为一个沿界线 (L) 的积分, 因为每个辅助线段上的积分都等于 0. 如此, 在这情形公式 (1) 也成立.

同样可建立公式

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{(L)} Q(x,y)dy, \tag{2}$$

这里假设在区域 (D) 上函数 Q 连同其偏导函数都连续. 在此先取图 31 上那样的曲边梯形作为区域 (D). 它以曲线

$$\begin{array}{l}(PS): x = x_0(y),\\ (QR): x = X(y)\end{array} \quad (c \leqslant y \leqslant d)$$

及两条平行于 x 轴的线段 (PQ) 和 (SR) 为界. 然后该公式也如前面那样推广到可用平行于 x 轴的直线分为有限个这种曲边梯形的区域.

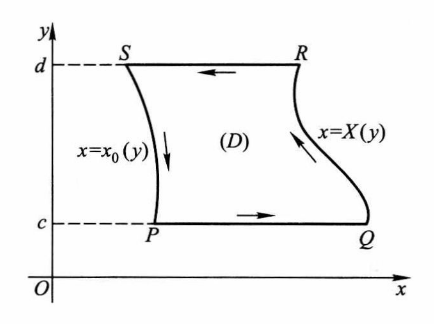


图 31

最后, 如果区域 (D) 同时满足两种情形的条件, 即既可分为有限个第一类型的梯形, 又可 (与此无关地) 分为有限个第二类型的梯形, 则对此区域 (1) 和 (2) 两公式都成立, 当然在此要假设函数 P, Q 及其导函数 $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 都是连续的. 由公式 (2) 减去 (1), 得

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{3}$$

这就是格林公式.[①]

附注 使公式 (3) 成立的条件采取以较广泛的形式. 即, 对任何由一条或几条逐段光滑界线所围的区域格林公式都成立. 这我们不来证明了.

347. 以线积分表示面积 下面我们将常常用到格林公式; 现在举一个最简单的例子 —— 面积的计算.

如果公式 (3) 中函数 P 和 Q 这样选取使 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ 等于 1, 则二重积分化为图形 (D) 的面积 D, 而我们得出借助沿该图形界线 (L) 的线积分表示其面积的公式. 例如, 令 $Q = x, P = 0$, 我们有

$$D = \int_{(L)} xdy. \tag{4}$$

在 $Q = 0, P = -y$ 时得

$$D = -\int_{(L)} ydx. \tag{5}$$

但更有用的是下列公式, 其中取 $Q = \dfrac{1}{2}x, P = -\dfrac{1}{2}y$:

$$D = \frac{1}{2}\int_{(L)} xdy - ydx. \tag{6}$$

例 1) 求半轴为 a 与 b 的椭圆面积.

[①] George Green (1793—1841) 是英国数学家. 但事实上, 公式 (3) 并不属于格林, 其所以加上他的名字只是因为它与格林所推出的三维情形的别的公式相似. 高斯及黎曼已经利用过公式 (3), 而其特殊形式则在 18 世纪分析著作中已经出现了.

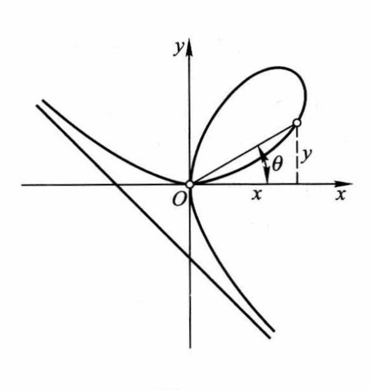


图 32

采用椭圆的参变方程: $x = a\cos t, y = b\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. 按公式 (6)

$$D = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t dt - b\sin t(-a\sin t)dt$$
$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

线积分用 **331** 段公式 (6) 来计算; 决定积分限时注意界线环行正向相应于参变量值增大.

2) 求笛卡儿叶形线

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

一圈的面积 (图 32).

要得出界线的参变方程我们令 $y = tx$①. 于是

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由几何想法, 显然在参变量 t 由 0 变至 $+\infty$ 时该线描出一圈 $\left(\text{因 } t = \frac{y}{x} = \tan\theta, \text{ 而 } \theta \text{ 由 } 0 \text{ 变至 } \frac{\pi}{2}\right)$. 我们有

$$dx = 3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}dt, \quad dy = 3a\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}dt$$

而

$$D = \frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^2dt}{(1+t^3)^2} = \frac{3}{2}a^2.$$

注意这里我们用了无穷积分限的反常积分, 而当初在 **331** 段推出公式 (6) 时却认为参变量的变化区间是有限的. 不难证实这样做法是合理的: 只要预先引入另一具有有限变化区间的参变量 (例如角 θ), 然后化为参变量 $t = \frac{y}{x}$.

§4. 线积分与积分道路无关的条件

348. 沿简单闭界线的积分 格林公式使我们很容易完全解决第二型线积分问题, 这个问题在第二十章, §2 里只能偶尔提到 [例如 **333** 段附注].

设在某连通区域 (E) 内给定了两个连续函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$. 我们先来讨论积分

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy$$

沿 (E) 内任何简单闭界线 (L)② 化为 0 的问题.

①这种替换通常适于下述的情形: 代数曲线的方程中有两组齐次的项而次数差 1.

②本段所谈曲线全是逐段光滑的.

要使用格林公式, 我们还须再假设在 (E) 内存在连续导函数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial Q}{\partial x}$. 此外还须设在 (E) 内任取一闭界线 (L) 时, (L) 所包围区域 (D) 也整个属于 (E). 换句话说, 区域 (E) 不应有 "空洞", 哪怕这种空洞只是些点而已. 具有这种性质的连通区域叫做单连通区域.

如果所讲的是有限区域, 即不展布到无穷的区域, 则单连通概念可以陈述得简单一些: 区域应由唯一闭路所包围. 图 33 表出的是单连通及非单连通区域的例子. 其中 (a), (d), (f) 是有限的, (b), (c), (e) 是伸展至无穷的.

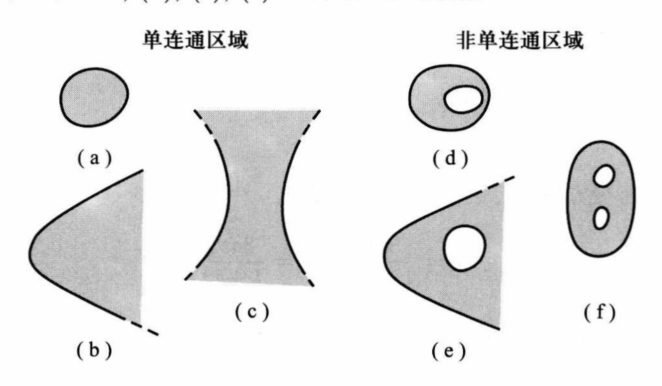


图 33

现在陈述一个基础命题:

定理 1 设在单连通区域 (E) 内函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 连同其导函数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 都有定义并且连续; 更设 (L) 是区域 (E) 内任意的简单闭曲线. 于是等式

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy = 0 \tag{1}$$

成立的必要而充分的条件是在 (E) 内成立恒等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{A}$$

事实上, 按格林公式等式 (1) 就等价于等式

$$\iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0. \tag{2}$$

显然, 条件 (A) 是此式成立的充分条件. 要证明其为必要条件, 我们假设等式 (2) 恒真. 于是由被积函数的连续性可借助积分对区域的微分法 [**342** 段] 得出在 (E) 内恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad 即 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

的结论.

349. 沿联结任意两点的曲线的积分 最后, 我们来讨论下列问题: 沿联结区域 (E) 内两点 A 与 B 的曲线 (AB) 的积分

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy \tag{3}$$

在什么条件下与道路 (AB) 的形状无关? 这里起决定性作用的也就是条件 (A).

定理 2 在前面的假设之下, 要积分 (3) 与积分道路无关, 其必要而充分的条件是 (A)①.

必要性 设积分 (3) 与道路无关而在 (E) 内取任一简单闭界线 (L) (图 34). 如果 A 与 B 是其两点, 则按假设

$$\int_{(A\text{I}B)} = \int_{(A\text{II}B)}, \tag{4}$$

由此有

$$\int_{(L)} = \int_{(A\text{I}B)} + \int_{(B\text{II}A)} = 0. \tag{5}$$

所以, 按定理 1 必须实现条件 (A).

充分性 现在我们假设等式 (A) 在 (E) 内成立. 要来证明, 如果将该区域内任意两点 A, B 用两条简单曲线 $(A\text{I}B)$ 和 $(A\text{II}B)$ 联结起来, 则等式 (4) 总是成立的. 这很容易做到, 如果所说两曲线除 A, B 外没有公共点的话, 因为这时候界线 $(L) = (A\text{I}B\text{II}A)$ 就成简单闭曲线, 故按定理 1 等式 (5) 成立, 而由它就可反过来推出 (4).

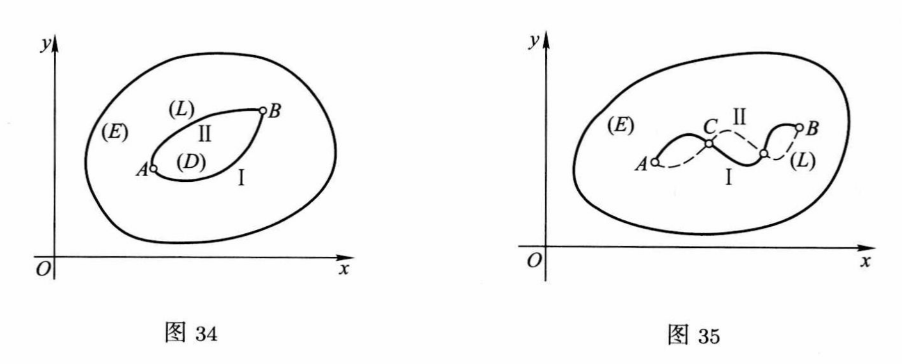


图 34　　图 35

如果曲线 $(A\text{I}B)$ 和 $(A\text{II}B)$ 相交于有限多个点, 则界线 (L) 已经不是简单的: 它在这些点上自身交叉 (图 35). 由点 A 出发并循曲线 (L) 的方向描出其一部分至第一个交叉点 C 为止. 除去所得闭曲线 (L_1), 延续这条道路到另一交叉点, 这样又可

①读者不难验证, 条件 (A) 在 **333** 段的例 1) 与 4) 中实现, 在例 2), 3), 5) 中不实现.

分出一条闭曲线 (L_2), 如此等等. 经有限多步后曲线 (L) 终于被分成有限多条简单(不自身交叉的) 闭曲线

$$(L_1), (L_2), \cdots,$$

沿它们的积分显然是 0. 这就是说, 积分沿全曲线 (L) 都等于 0, 而由此又可推出 (4).

但曲线 (AIB) 及 $(AIIB)$ 一般甚至可交叉无穷多次, 在这情形上面的推证法就不适用了. 要克服这个困难, 我们来证明下面关于用沿折线的积分来逼近线积分的引理.

引理 设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在某开区域 (E) 内连续, 而 (L) 是包含在 (E) 内的逐段光滑的非闭曲线. 如果在 (L) 中内接一条折线 (Λ), 则当其最大的节趋于 0 时我们有

$$\lim \int_{(\Lambda)} Pdx + Qdy = \int_{(L)} Pdx + Qdy.$$

只要限于积分 $\int_{(\Lambda)} Pdx$ 和 $\int_{(L)} Pdx$ 的情形就够了; 对积分 $\int_{(\Lambda)} Qdy$ 及 $\int_{(L)} Qdy$ 推证法完全相似. 设在 (L) 中作一内接折线 (Λ), 其顶点在

$$A \equiv A_0, A_1, \cdots, A_i, A_{i+1}, \cdots, A_n \equiv B,$$

以 x_i, P_i 表示 x, P 在点 A_i 的值. 对任意指定的 $\varepsilon > 0$, 弦 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 的长可如此地小, 使 1) 连续函数 P 沿 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 的摆幅小于 ε 并且 2) 积分和 $\sum_i P_i \Delta x_i$ 与其极限 $\int_{(L)} Pdx$ 之差也小于 ε.

显然, 我们有

$$\int_{(\Lambda)} Pdx = \sum_i \int_{(A_iA_{i+1})} Pdx,$$

并且另一方面

$$\sum_i P_i \Delta x_i = \sum_i \int_{(A_iA_{i+1})} P_i dx,$$

如此

$$\int_{(\Lambda)} Pdx = \sum_i P_i \Delta x_i + \sum_i \int_{(A_iA_{i+1})} [P - P_i] dx.$$

但右边第一项与积分 $\int_{(L)} Pdx$ 相差小于 ε [参看 2)], 而第二项绝对值不超过 $\varepsilon \sum_i \overline{A_iA_{i+1}}$ [参看 1)], 即更小于 $L \cdot \varepsilon$ (L 是曲线 (L) 的长).

所以最后有

$$\left| \int_{(\Lambda)} Pdx - \int_{(L)} Pdx \right| < \varepsilon(1 + L),$$

这就证明了我们的断言.

现在回到那中断了的充分性证明. 在曲线 (AIB) 和 $(AIIB)$ 上各作内接折线 (Λ_{I}) 和 (Λ_{II}); 它们最多只能相交于有限个点, 而这时候如已证明的将有

$$\int_{(\Lambda_{\mathrm{I}})} = \int_{(\Lambda_{\mathrm{II}})}.$$

剩下只要对这等式取极限, 把两折线所有各节均看作趋于 0, 结果仍得等式 (4).

350. 与恰当微分问题的联系 微分式

$$Pdx + Qdy \tag{6}$$

使人想起二元函数 $F(x,y)$ 的 (全) 微分表达式 [**142** 段]

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy,$$

它只要令

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q \tag{7}$$

即与 (6) 式等同.

但远非每个像 (6) 那样的式子都是 “恰当微分”, 即并非每个这样的式子都有 “原函数” $F(x,y)$ 以该式为其 (全) 微分. 在解决 (7) 式是否为恰当微分的问题时我们又碰到同一条件 (A):

定理 3 *在前面的假设之下, (6) 式成恰当微分的必要而充分的条件是要 (A) 成立.*

*必要性*是立即可以明白的: 如果 (6) 式是某函数 $F(x,y)$ 的 (全) 微分, 而等式 (7) 成立, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},$$

剩下只要引证 **147** 段关于混合导数的定理就行了. (要用到连续性假设!)

现在来证明其*充分性*. 我们已经知道, 在条件 (A) 实现时积分 (3) 就与积分道路无关 (按定理 2), 在这情形只要点 $A(x_0,y_0)$ 和 $B(x_1,y_1)$ 给定, 积分就唯一地决定了, 因此它可以用

$$\int_A^B Pdx + Qdy \quad 或 \quad \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy$$

这样的记号来表示. 这里只指出了积分道路的起讫点; 道路本身没有指出, 但它是没有关系的 —— 不妨沿任何道路来积分.

如果点 $A(x_0,y_0)$ 固定, 而点 B 以区域 (E) 内一个任意的点 $M(x,y)$ 来代替, 则所得积分是区域 (E) 内*点 M 的一个函数*, 即坐标 x, y 的函数:

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy. \tag{8}$$

我们要指明, 这个函数也就是 (2) 式的原函数, 为此我们来讨论其对 x 及对 y 的偏导数问题.

在区域 (E) 内任取一点 $B(x_1, y_1)$ 而给 x_1 一增量 Δx 使其变成点 $C(x_1+\Delta x, y_1)$, 在 Δx 充分小时这一点连同整个线段 BC 都属于 (E) (图 36). 相应函数值为

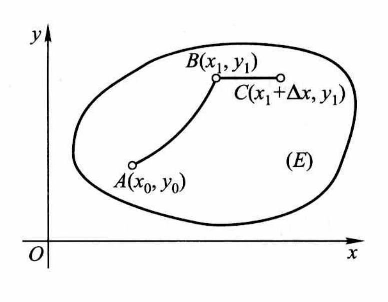


图 36

$$F(x_1, y_1) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy,$$

$$F(x_1+\Delta x, y_1) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} Pdx + Qdy.$$

这些积分中第一个我们沿任一联结点 A 与 B 的曲线 (K) 来取, 第二个的积分道路则由同一曲线和直线段 BC 所组成. 如此, 函数 F 的增量是

$$F(x_1+\Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = \int_{(BC)} Pdx + Qdy = \int_{(BC)} P(x, y)dx;$$

包含 Qdy 的一个积分化为 0, 因为线段 BC 是垂直于 y 轴的.

剩下一个积分可直接化为寻常定积分: 为此在被积函数中须以 y_1 代 y (由直线 BC 的方程 $y = y_1$) 并且取点 B 和 C 的横坐标作为依 x 的积分限. 最后有

$$F(x_1+\Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = (R)\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} P(x, y_1)dx.$$

应用中值定理于所得这个寻常积分上并两边除以 Δx, 得

$$\frac{F(x_1+\Delta x, y_1) - F(x_1, y_1)}{\Delta x} = P(x_1+\theta\Delta x, y_1) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1).$$

现在令 Δx 趋于 0. 由函数 $P(x, y)$ 的连续性, 等式的右边, 因而还有其左边就都趋于 $P(x_1, y_1)$. 所以, 在点 (x_1, y_1) 上函数 F 依 x 的偏导数存在并可表示为等式

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x} = P(x_1, y_1).$$

同样可建立公式

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y} = Q(x_1, y_1).$$

既然点 (x_1, y_1) 是在区域 (E) 内任意取的, 那么对此区域中所有点将成立关系 (7)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

因为这些偏导函数是连续的, 所以函数 $F(x, y)$ 有微分 [**142** 段]:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = Pdx + Qdy,$$

这就是所求证的.

将定理 1, 2 与 3 互相对照可以导出这样的

推论 *在所作假设之下, 要积分 (3) 与道路无关 (而沿闭界线该积分等于 0), 其必要而充分的条件是要被积式 (6) 是恰当微分.*

在证明定理 3 时我们对与道路无关的线积分 (8) 建立了一个与寻常定积分依变上限微分的定理完全相似的结果 [**183** 段, 12°].

现在假设我们已经知道被积式 (6) 的一个原函数 $\Phi(x,y)$, 如此除对函数 (8) 成立的关系式 (7) 外还有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q;$$

于是差式

$$F(x,y) - \Phi(x,y) = C = \text{常数}.$$

(须知其对 x 及 y 的偏导数恒等于 0!) 令 $x = x_0, y = y_0$, 我们得 $C = -\Phi(x_0, y_0)$, 如此

$$F(x,y) = \Phi(x,y) - \Phi(x_0, y_0).$$

最后, 如果在此取 $x = x_1, y = y_1$, 则得公式

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_0, y_0) = \Phi(x,y)\Big|_{x_0,y_0}^{x_1,y_1} \tag{9}$$

或写得简单一点

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \Phi(B) - \Phi(A) = \Phi(M)\Big|_A^B. \tag{9a}$$

这个公式与以原函数表出寻常定积分的积分学基本公式完全相似 [**185** 段]. 但再强调一次, 它只适用于与道路无关的线积分.

附注 以条件 (A) 表示恰当微分的特征出于欧拉和克莱罗 (1740 年).

微分式 (6) 的线积分 (没有这个名称) 也最先在克莱罗著作《地球形状的理论 ⋯⋯》(1743 年)① 中看到. 克莱罗将曲线形状给成了 x 与 y 间的方程的形式, 借助它由 (6) 消去 y 和 dy, 然后将所得只含 x 和 dx 的式子积分. 那里克莱罗也指出了积分与曲线形状无关的条件: (6) 式应该是完全微分, 而这又要条件 (A) 实现.

351. 在物理问题上的应用 有了所讲这些理论我们现在回到以前 [**335** 段] 所讨论过的力学及物理方面的问题.

1) *力场的功* 我们已经看到, 在一个质量为 1 的质点由点 A 移动到点 B 时其力场的功可表示为线积分 [参看 **335** 段, (12)]:

$$\boldsymbol{A} = \int_{(AB)} Xdx + Ydy, \tag{10}$$

这里 $X = X(x,y)$ 及 $Y = Y(x,y)$ 为力场强度在坐标轴上的射影, 而 (AB) 表示质点的轨线.

① 有俄文译本 (苏联科学院出版社, 1947); 参看 43 页.

很自然地要问, 在什么条件下力场的功只与点的起讫位置有关而与轨线形状无关. 这个问题显然等价于线积分 (10) 的值与积分道路无关的问题. 所以所求的条件就是等式

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}, \tag{11}$$

当然在此要假设包含力场的区域是单连通的并且函数 X, Y 及其导函数处处都是连续的.

同一条件也可表示成这样形式: 一质点由一个位置移动至另一位置时, 如要力场的功与轨线形状无关, 则其必要而充分的条件是要元功

$$Xdx+Ydy$$

成某一函数 $U(x,y)$ 的 (全) 微分. 这个函数通常称为力函数或位势函数; 在这函数存在的情形则场本身称位势场.

一点由位置 $A(x_0,y_0)$ 移动至位置 $B(x_1,y_1)$ 时位势场之功就等于相应力函数增量:

$$U(x_1,y_1)-U(x_0,y_0)=U(B)-U(A). \tag{12}$$

作为一个实例我们来看牛顿引力场. 如果在坐标原点 O 放一个质量 μ, 而在点 A 放一质量 1, 则后一质量将受到吸引力 $\overrightarrow{F}$, 其方向朝着中心 O, 其大小等于

$$F=\frac{\mu}{r^2},$$

这里 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 是点 A 与原点的距离①. 因为此力与坐标轴所成之角的余弦分别为 $-\frac{x}{r}$ 及 $-\frac{y}{r}$, 所以力 $\overrightarrow{F}$ 在轴上的射影可表示成:

$$X=-\frac{\mu x}{r^3},\quad Y=-\frac{\mu y}{r^3}.$$

显然, 牛顿场是位势场, 因为

$$-\frac{\mu x}{r^3}dx-\frac{\mu y}{r^3}dy \tag{13}$$

是函数

$$U=\frac{\mu}{r}$$

的微分, 而这函数在此就起位势函数的作用; 它叫做 (场在点 O 的) 牛顿位势. 尽管在坐标原点上有一 "奇点" —— 那里函数 X, Y 不连续, 而 (13) 式沿闭界线的积分即便界线包含原点时仍为 0.

在质点由位置 A 移动至位置 B 时场力做的功 [参看 (12)]

$$A=\frac{\mu}{r_B}-\frac{\mu}{r_A},$$

这里 r_A 及 r_B 分别为点 A 及 B 与中心的距离.

2) 不可压缩流体的平面定常流动 如果以 u, v 表示速度向量沿坐标轴的分量, 则如 **335** 段, 2) 讲过的, 单位时间内通过闭界线 (K) 流向内部的流体量等于

$$Q=\int_{(K)}vdx-udy$$

①原点上电荷 μ 所引起的库仑引力静电场也是这样的 (如果讲的是场在带电质点上的作用的话).

[参看 **335** 段, (14)]. 在没有源和汇时这个积分恒等于 0. 由此推知, 速度向量的分量 u, v 必须适合条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

于是被积式 $vdx - udy$ 有一原函数 $\varphi(M) = \varphi(x, y)$, 它在流体力学中称为流函数.

如果取任一联结点 A 与 B 的曲线 (AB), 则我们知道 [**335** 段, (14)], 在单位时间内通过它流向一侧的流体量可由积分

$$Q = \int_{(AB)} vdx - udy$$

表出, 曲线 (AB) 上的方向应该这样选定使得指向所说一侧的法线与切线正向的夹角为 $+\frac{\pi}{2}$. 现在我们看到, 此量恰等于曲线两端流函数值之差 $\varphi(B) - \varphi(A)$!

§5. 二重积分的变量替换

352. 平面区域的变换 设给了两个平面, 一个带有一组直角坐标轴 x, y, 另一个带有同样的坐标轴 ξ, η, 我们设想在这两个平面上有两个有界闭区域: 在 xy 平面上有一区域 (D) 而在 $\xi\eta$ 平面上有一区域 (Δ).

每一区域的界线或边界我们都假设是逐段光滑的简单曲线; 区域 (D) 的界线以 (S) 表示, (Δ) 的以 (Σ) 表示 (图 37).

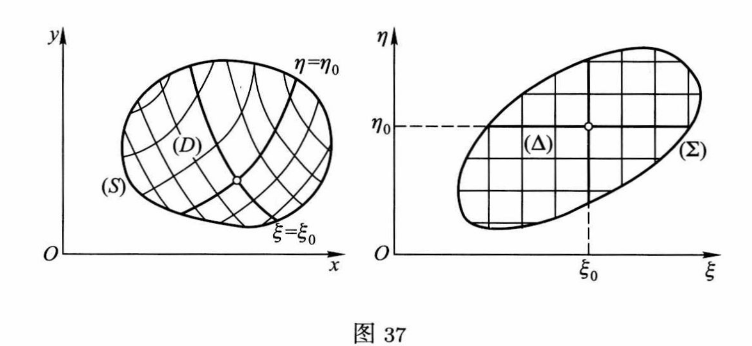


图 37

设在区域 (Δ) 内给了一组连续函数

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta), \\ y &= y(\xi, \eta), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

它给区域 (Δ) 内每个点 (ξ, η) 配以一个 (D) 内的相应点 (x, y), 并且 (D) 内没有一个点被漏掉, 每一个这样的点都至少与 (Δ) 内某一点 (ξ, η) 相应.

如果 (Δ) 中不同的点 (ξ, η) 都相应于 (D) 中不同的点 (x, y) (今后假设一律如此), 如此每点 (x, y) 只相应于一个点 (ξ, η), 则方程 (1) 可对 ξ, η 单值地解出: 变量

ξ,η 也是区域 (D) 内 x,y 的单值函数:

$$\left.\begin{array}{l}\xi=\xi(x,y),\\ \eta=\eta(x,y).\end{array}\right\} \tag{1a}$$

如此, 在区域 (D) 与 (Δ) 之间建立了一种相互单值的或一对一的关系. 也可以说公式 (1) 实现区域 (Δ) 至区域 (D) 的变换, 而公式 (1a) 给出区域 (D) 至区域 (Δ) 这逆变换.

要注意此时界线 (Σ) 上的点必定相应于界线 (D) 上的点, 反过来说也如此.

我们还假设函数 (1) 不但本身连续, 并且还在 (Δ) 内有一阶连续偏导函数.

于是函数行列式

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial x}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{vmatrix} \tag{2}$$

也在区域 (Δ) 内是 ξ,η 的连续函数. 我们认为这行列式永远不等于 0, 所以按连续性保持固定的正负号. 这假设以后将起重要作用.

如果在区域 (Δ) 内取一逐段光滑曲线 (Λ), 则由变换 (1) 它变成区域 (D) 内一条同样的曲线 (L).

事实上, 设曲线 (Λ) 的方程是

$$\xi=\xi(t),\quad \eta=\eta(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta\quad \text{或}\quad \alpha\geqslant t\geqslant\beta), \tag{3}$$

并且 (如限于曲线的一个光滑段) 可以认为函数 $\xi(t),\eta(t)$ 有不同时等于 0 的连续导函数. 将这些函数代入变换 (1) 的公式里, 我们得相应曲线 (L) 的参变方程:

$$\begin{aligned}x&=x(\xi(t),\eta(t))=x(t),\\ y&=y(\xi(t),\eta(t))=y(t).\end{aligned} \tag{4}$$

不难看出, 这些函数也有连续导函数:

$$\begin{aligned}x'(t)&=\frac{\partial x}{\partial\xi}\xi'(t)+\frac{\partial x}{\partial\eta}\eta'(t),\\ y'(t)&=\frac{\partial y}{\partial\xi}\xi'(t)+\frac{\partial y}{\partial\eta}\eta'(t).\end{aligned} \tag{5}$$

它们也不能同时等于 0, 如此在曲线 (L) 上没有奇点.

事实上, 如其不然, 则因行列式 $\dfrac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$ 不等于 0 而由 (5) 将从而有同时 $\xi'=0$ 及 $\eta'=0$, 这与所设矛盾.

如果点 (ξ,η) 在 $\xi\eta$ 平面上描出一闭界线 (Λ), 比如说沿着正的方向, 则相应点 (x,y) 也在 xy 平面上描出一闭界线 (L), 但其方向可正可负. 这问题下面将看出 [**354** 段, 1°] 就取决于函数行列式的正负号.

区域 (Δ) 内每一对变量值 ξ 与 η 在 xy 平面上单值地决定区域 (D) 内的一点，反过来也是如此. 因此 ξ,η 两数也可称为区域 (D) 内点的坐标.

区域 (D) 内那些有一个坐标保持固定的点所组成的曲线叫做坐标线.

例如, 在 (1) 中令 $\eta=\eta_0$ 我们得到一条坐标线的参变表达式如下:

$$x=x(\xi,\eta_0),$$
$$y=y(\xi,\eta_0)$$

(这里 ξ 是参变量). 在方程 (1a) 第二式中令 $\eta=\eta_0$ 即得同一线的隐式方程:

$$\eta(x,y)=\eta_0.$$

由于, 坐标线一般说来是曲线, 因此把决定 xy 平面上点的位置的数 ξ,η 叫做点的曲线坐标.

给坐标 η 以不同的 (可能的) 常数值, 我们就在 xy 平面上得出整族的坐标线. 固定坐标 ξ 的值, 我们可得出另一族坐标线. 在所考虑区域间有单值对应关系时同一族的不同曲线彼此都不相交, 并自区域 (D) 内每个点有每族中的一条线通过.

xy 平面上整个坐标线网就是 $\xi\eta$ 平面上直线网 $\xi=$ 常数和 $\eta=$ 常数的映像 (图 37).

例 1) 曲线坐标中, 最简单而重要的例子是极坐标 r,θ. 它们有直观几何解释, 即径向量及极角, 但也可形式地以熟悉的关系

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\theta,\\ y&=r\sin\theta\end{aligned}\right\}\quad(r\geqslant 0)$$

来引入.

如果沿两条垂直的轴截取 r 与 θ 的值, 比如说, r 算横坐标, θ 算纵坐标 (右手定向法), 则半平面 $r\geqslant 0$ 的每一点按上述公式相应于 xy 平面上的一个点.

读者或许已遇到过本例中的坐标线: 直线 $r=$ 常数相应于半径为 r、中心在原点的圆, 而直线 $\theta=$ 常数相应于通过原点与 x 轴成 θ 角的射线 (图 38).

但在本例中变换公式一般不能单值地解出: 角 θ 的大小改变 $2k\pi$ (k 为整数) 并不影响 x 与 y 的值. 要得出 xy 平面的所有点只要将 θ 的值限于

$$r\geqslant 0,\quad 0\leqslant\theta<2\pi$$

就够了. 每个异于原点的点 (x,y) 都相应于一个 $r>0$ 的值及上述范围内的一个 θ 值. 但关于坐标原点则仍未能避免破坏一一对应性: 点 $x=y=0$ 相应于 $r\theta$ 平面上的整个 θ 轴 (有时也可指其由 $\theta=0$ 至 $\theta=2\pi$ 的一段).

我们来看 $r\theta$ 平面上一个闭矩形 $[0,R;0,2\pi]$ 或 $o\alpha\beta\gamma$ (图 39); 不难看出, 它相应于 xy 平面上一个围绕原点而半径 $R=OA$ 的闭圆. 但这个圆的全界线只相应于所说矩形的一边 $\alpha\beta$; 边 $o\alpha$ 和 $\beta\gamma$ 二者则都相应于该圆同一半径 OA; 最后, 整个边 $o\gamma$ 则仅仅相应于一点 O. 前段中所指出的条件在这里显然没有成立.

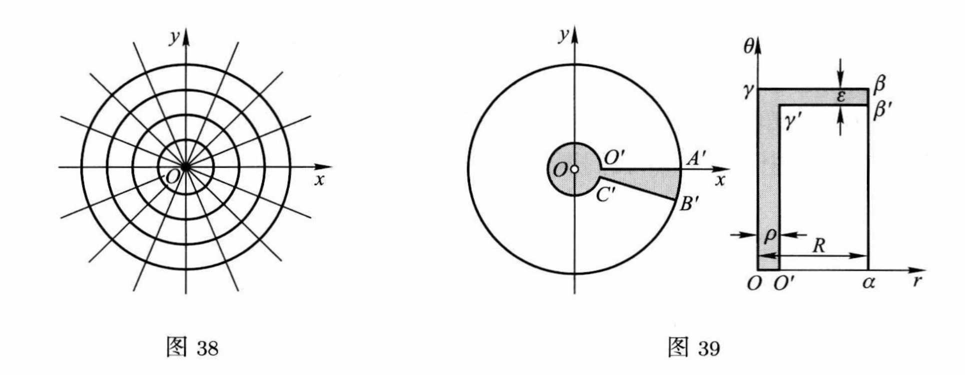


图 38 图 39

但如果将边 $o\gamma$ 推移一小量 $\rho = oo'$, 而边 $\gamma\beta$ 推移一小量 $\varepsilon = \beta\beta'$, 则新的矩形 $o'\alpha'\beta'\gamma'$ 将相应于 xy 平面上的图形 $O'AB'C'$, 后者由原来的圆去掉一半径为 ρ 的小圆及中心角为 ε 的窄扇形而得, 这一来所有条件都符合了. 在 $r\theta$ 平面上一点沿线段 $\alpha\beta', \beta'\gamma', \gamma'o', o'\alpha$ 移动时, xy 平面上的相应点将依次描出: 优弧 AB' (半径为 R), 线段 $B'C'$, 优弧 $C'O'$ (半径为 ρ) 及线段 $O'A$. 顺便指出, $r\theta$ 平面上正向环行就相应于 xy 平面上的正向环行.

在本例中函数行列式等于

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r;$$

它在除出原点时就保持为正号.

2) 有时预先给定坐标线网, 然后依据它建立曲线坐标系要方便些.

例如我们来看两抛物线族 (图 40):

$$y^2 = 2px \quad 和 \quad x^2 = 2qy;$$

每族各自填满整个 xy 平面 (除出坐标轴).

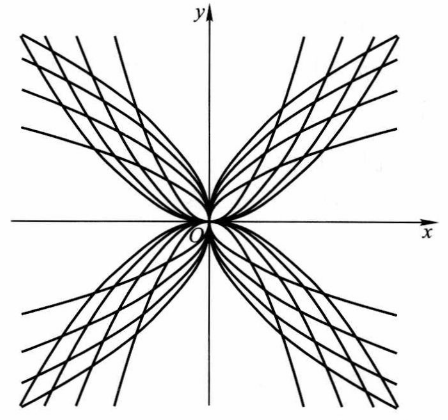


图 40

自然可以采取 $\xi = 2p$ 和 $\eta = 2q$ 作曲线坐标. 由等式 $y^2 = \xi x$ 和 $x^2 = \eta y$ 我们有

$$x = \sqrt[3]{\xi\eta^2}, \quad y = \sqrt[3]{\xi^2\eta} \quad 及 \quad \xi = \frac{y^2}{x}, \eta = \frac{x^2}{y} \quad (x, y \neq 0).$$

这里行列式等于

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}\xi^{\frac{1}{3}}\eta^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}\xi^{-\frac{1}{3}}\eta^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}\xi^{\frac{2}{3}}\eta^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

353. 以曲线坐标表示面积 我们假设 xy 平面上给定了一个区域 (D), 它由一逐段光滑简单界线 (S) 所包围. 设公式 (1) 建立了这个区域与 $\xi\eta$ 平面上由类似界线 (Σ) 所围的区域 (Δ) 之间的一一对应关系.

我们保留 **352** 段中所有关于这区域变换的假设, 并且还假设在区域 (Δ) 内诸函数 (1) 中任何一个都有连续的二阶混合导函数, 比如说

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta} \quad 及 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\xi} \quad 等$$

(由于连续性它们有相等的值, **147** 段)①.

在这些假设之下我们现在的问题是要把 xy 平面上的一个区域的面积 D 表示为展布在 $\xi\eta$ 平面上区域 Δ 内的二重积分.

我们由

$$D = \int_{(S)} x dy, \tag{6}$$

这个以沿区域 (D) 的界线 (S) 所取的线积分表示面积 D 的公式出发 [参看 **347**段, (4)].

以后的变换步骤如下: 先利用界线的参变方程由线积分 (6) 转为寻常定积分. 然后再将此定积分变为线积分, 但这次已经是沿区域 (Δ) 的界线 (Σ) 取的. 最后, 用格林公式将所得线积分换成区域 (Δ) 内的二重积分.

在实现这些步骤时我们需要界线 (S) 的参变方程. 既然以后我们想要过渡到界线 (Σ), 则现在不如就由这界线的方程出发. 设 (3) 式给出曲线 (Σ) 的参变表示法; 于是 (4) 式显然给出曲线 (S) 的参变表示法 [由我们的假设推知, **352** 段], 因为正是这条曲线在 xy 平面上相应于界线 (Σ). t 的变化界限 α 与 β 我们选择得使由 α 变到 β 时曲线 (S) 以正的方向描出; 这永远可以做到.

于是, 按 **331** 段公式 (5^*),

$$D = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt$$

或者注意到公式 (4) 和 (5) 则有

$$D = \int_\alpha^\beta x(\xi(t),\eta(t))\left[\frac{\partial y}{\partial\xi}\xi'(t) + \frac{\partial y}{\partial\eta}\eta'(t)\right]dt. \tag{7}$$

将这个积分与沿界线 (Σ) 正向所取的线积分

$$\int_{(\Sigma)} x(\xi,\eta)\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta\right) \tag{8}$$

对比. 如果想要把这线积分按寻常法则化为寻常定积分, 则这里必须以曲线 (Σ) 参变方程中的函数 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 来替代 ξ 和 η, 而回到积分 (7).

但是还要注意到一种情况. 在 t 由 α 变至 β 时界线 (S) 是以正的方向描出的——我们就是这样选取这两个变化界限的. 但界线 (Σ) 在此可以循正向描出也可以

①这些补充假设对最后结果的正确性而言是不重要的, 加入它们只是为了证明起来容易一点.

循负向描出; 如此, 积分 (7) 和 (8) 事实上可以正负号不同, 在任一情形下

$$D = \pm \int_{(\Sigma)} x\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + x\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta, \tag{9}$$

并且 (再提醒一次), 如界线 (S) 的正向环行相应于界线 (Σ) 的正向环行, 则取正号; 否则取负号.

最后, 只剩下要将所得线积分化为二重积分. 这要用到格林公式.

$$\int_{(\Sigma)} P(\xi,\eta)d\xi + Q(\xi,\eta)d\eta = \iint\limits_{(\Delta)} \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) d\xi d\eta,$$

这里我们令

$$P(\xi,\eta) = x\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad Q(\xi,\eta) = x\frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

因为

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{\partial x \partial y}{\partial \xi \partial \eta} + x\frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi},$$
$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial x \partial y}{\partial \eta \partial \xi} + x\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta},$$

而 y 的二阶混合导数彼此相等, 所以

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)},$$

并且我们得出公式

$$D = \pm \iint\limits_{(\Delta)} \frac{D(x,y)}{D(\xi,y)} d\xi d\eta.$$

我们在 **352** 段已看到, 在所作假设之下行列式

$$J(\xi,\eta) = \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}.$$

在区域 (Δ) 内保持一定的正负号. 故积分也有同一正负号. 但积分前还有一双重号 $\pm$; 既然结果须得出一个真正的正数 D, 则显然这积分前面的正负号必须与行列式的正负号一致. 如果将这正负号并到积分号下的函数上, 则在那里显然就得出行列式的绝对值, 如此面积的最后表达式是

$$D = \iint\limits_{(\Delta)} \left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| d\xi d\eta = \iint\limits_{(\Delta)} |J(\xi,\eta)| d\xi d\eta. \tag{10}$$

这就是我们所要建立的公式.

积分号下的式子

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| d\xi d\eta = |J(\xi,\eta)| d\xi d\eta$$

通常称为曲线坐标系中的面积元素. 例如我们曾看到在化为极坐标时函数行列式等于 r, 所以极坐标面积元素是 $rdrd\theta$.

354. 补充说明 1°. 如果将公式 (9) 中如何选取正负号的法则与这一正负号必须与函数行列式正负号一致这一事实相比较, 就可推出一有趣的推论: 如果这行列式保持正号, 则界线 (S) 和 (Σ) 的环行正向依变换公式彼此相对应, 如果这行列式有负号, 则一个界线的正向相应于另一界线的负向.

显然, 这对区域 (S) 和 (Σ) 中任何一对相应的简单闭界线而言都是如此. 所得结果不难用 **352** 段所举的例子来验证.

2°. 将中值定理 [**341** 段, (9)] 应用于公式 (10), 可得出关系式

$$D = |J(\overline{\xi}, \overline{\eta})| \cdot \Delta, \tag{11}$$

其中 $(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ 是区域 (Δ) 内一点, 而 Δ 是这区域的面积.

将这关系与拉格朗日公式比较:

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\overline{\xi})(\beta - \alpha) \quad (\alpha < \overline{\xi} < \beta).$$

如果 $x = f(\xi)$ 是单调函数, 则它在区间 $\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$ 与 $f(\alpha) \leqslant x \leqslant f(\beta)$ [如果 $f(x)$ 是减函数则为 $f(\beta) \leqslant x \leqslant f(\alpha)$] 之间建立一一对应关系. 以 δ 和 d 表示此二区间之长; 于是拉格朗日公式化为等式

$$d = |f'(\overline{\xi})| \cdot \delta, \tag{12}$$

它与等式 (11) 相似.

如果在公式 (12) 中将区间 $[\alpha, \beta]$ "缩" 成一点 ξ, 则结果得出关系式

$$|f'(\xi)| = \lim \frac{d}{\delta},$$

如此导数的绝对值可以说是 ξ 直线 (在所给的点上) 变换成 x 直线的延展系数.

同样由公式 (11) 将区域 (Δ) "缩" 成一点 (ξ, η) 而得

$$|J(\xi, \eta)| = \lim \frac{D}{\Delta}\text{①},$$

如此函数行列式的绝对值也就起了 $\xi\eta$ 平面 (在其所给一点上) 变换为 xy 平面的延展系数的作用.

在此我们又一次看到导数与函数行列式间深刻的相似之处 (参看第十九章).

3°. 公式 (11) 告诉我们, 面积 Δ 无限变小时其相应面积 D 也无限变小. 由此已经不难证明, 在 **352** 段所讨论的区域变换具有如下重要性质: 它将区域 (Δ) 内一条面积为 0 的曲线 (Λ) 变为区域 (D) 内一面积也为 0 的曲线 (L).

4°. 公式 (10) 是假设了区域 (D) 与 (Δ) 间有一一对应关系, 函数 (1) 及其偏导数连续, 并且行列式 (2) 正负号不变这些条件而导出的. 但在实际上常会遇到这些假设在一些个别点上或个别曲线上不成立的情形.

①这实际是将积分 (10) 在点 (ξ, η) 对区域微分 [**342** 段].

如果这些点和曲线在两平面上都可用面积任意小的区域 (d) 和 (δ) 包起来, 则将它们除出去以后这公式就成为可应用的了:

$$D-d=\iint\limits_{(\Delta)-(\delta)}|J(\xi,\eta)|d\xi d\eta. \tag{10a}$$

设函数行列式在区域 (Δ) 内保持有界:

$$|J(\xi,\eta)|\leqslant M;$$

于是积分 (10a) 与积分 (10) 只相差

$$\iint\limits_{(\delta)}|J(\xi,\eta)d\xi d\eta\leqslant M\delta.$$

取 (10a) 式在 d 及 $\delta\to 0$ 时的极限, 即又得公式 (10).

为了说明起见我们回到 **352** 段的例 1) 及图 39 的图形.

对于矩形 $\Delta=[0,R;0,2\pi]$ 及半径为 R 的圆 (D) 的情形 (圆心在原点) 公式 (10) 成为

$$D=\iint\limits_{(\Delta)}rdrd\theta$$

的形状, 要直接应用它是不行的. 但如果除掉阴影线所标的区域 (其面积随 ρ 及 ε 而趋于 0), 则对剩下的区域这公式就可以应用; 剩下只要取极限就行了.

355. 几何的推导法 公式 (10) 虽然简单但是不直观的推理法导出的. 现在我们来讲这公式的另一种推导法. 从几何方面看来这一推导法是非常明显的; 它属于奥斯特罗格拉茨基 [参看下面 **359** 段].

我们再来考虑公式 (1) 所给的由 $\xi\eta$ 平面至 xy 平面的变换. 在 $\xi\eta$ 平面上划分出一个无穷小矩形 $\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4$, 其边为 $d\xi$ 及 $d\eta$, 平行于 ξ 轴及 η 轴 (图 41a). 这矩形在 xy 平面上的映像是曲线四边形 $P_1P_2P_3P_4$ (图 41b); 我们来决定其面积.

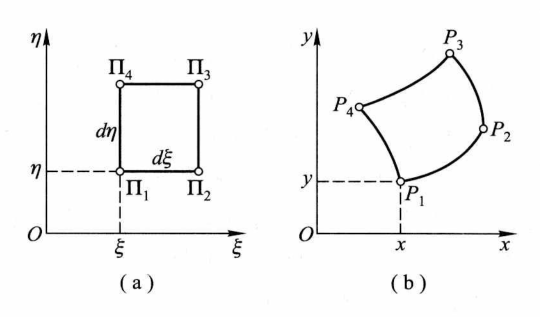


图 41

$\xi\eta$ 平面上那个矩形的顶点坐标如下:

$$\Pi_1(\xi,\eta),\quad \Pi_2(\xi+d\xi,\eta),\quad \Pi_3(\xi+d\xi,\eta+d\eta),\quad \Pi_4(\xi,\eta+d\eta);$$

在这情形相应曲线四边形的顶点将有这样的坐标:

$$\begin{aligned}
&P_1(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)),\\
&P_2(x(\xi+d\xi,\eta),y(\xi+d\xi,\eta)),\\
&P_3(x(\xi+d\xi,\eta+d\eta),y(\xi+d\xi,\eta+d\eta)),\\
&P_4(x(\xi,\eta+d\eta),y(\xi,\eta+d\eta)).
\end{aligned}$$

如果只限于对 $d\xi,d\eta$ 而言的一阶项, 则诸点可近似取为

$$\begin{aligned}
&P_1(x,y),\\
&P_2\left(x+\frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi,y+\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi\right),\\
&P_3\left(x+\frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta,y+\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta\right),\\
&P_4\left(x+\frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta,y+\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta\right),
\end{aligned}$$

这里 $x=x(\xi,\eta),y=y(\xi,\eta)$ 并且所有导数都是在点 (ξ,η) 上计算的, 既然线段 P_1P_2 和 P_3P_4 在两轴上有相等的射影, 则两线段本身相等而且平行, 如此, 若不计高阶无穷小则四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 可以说是一个平行四边形.

它的面积就等于三角形 $P_1P_2P_3$ 面积的二倍. 由解析几何知道, 顶点为 (x_1,y_1), $(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 的三角形的面积的二倍就等于行列式

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1, & x_3-x_2\\ y_2-y_1, & y_3-y_2\end{vmatrix}$$

的绝对值.

应用这个公式于当前的情形, 即得所求面积 (还是不计高阶无穷小) 等于行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\xi}d\xi & \dfrac{\partial x}{\partial\eta}d\eta\\ \dfrac{\partial y}{\partial\xi}d\xi & \dfrac{\partial y}{\partial\eta}d\eta\end{vmatrix}=\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}d\xi d\eta$$

的绝对值. 所以

$$\text{面积 } P_1P_2P_3P_4=\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|d\xi d\eta.$$

将 $\xi\eta$ 平面上的图形 (Δ) 用平行于坐标轴的直线分成许多无穷小矩形 (忽略边缘不规则的小块), 而同时将 xy 平面上的相应图形 (D) 分成了上述那种曲线四边形. 将已经得到的相应于它们的面积表达式加起来, 就重新得出公式 (10)[①].

① 这一推导法也不难做得完全严密.

如此, 刚才讲的奥斯特罗格拉茨基推导法指出一种重要的几何想法: 公式 (10) 的实质是, 决定图形 (D) 的面积时不是将此图形用平行于坐标轴的直线网分为传统的矩形面积元素而是用坐标曲线网分成曲线形的面积元素.

在某些简单的情形“面积元素”的曲线坐标表达式可以直接看出来, 几乎不需要计算.

例如, 在化为极坐标时可这样推想. $r\theta$ 平面上以 dr 及 $d\theta$ 为边的小矩形在 xy 平面上就相应于一个这样的图形: 它由半径为 r 和 $r+dr$ 的两圆弧及由原点出发与 x 轴成 θ 和 $\theta+d\theta$ 角的两射线所围成 (图 42). 将这图形近似地看作以 dr 和 $rd\theta$ 为边的矩形就立即得出所求面积元素表达式为 $rdrd\theta$.

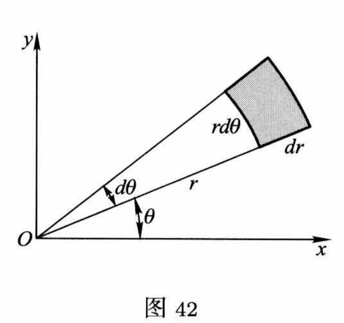
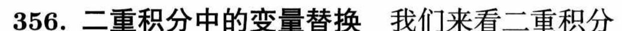


图 42



356. 二重积分中的变量替换 我们来看二重积分

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy. \tag{13}$$

这里区域 (D) 由逐段光滑的简单界线 (S) 所围, 而函数 $f(x,y)$ 在这区域内是连续的.

现在假设区域 (D) 由公式 (1)

$$x=x(\xi,\eta),\quad y=y(\xi,\eta)$$

与 $\xi\eta$ 平面上某区域 (Δ) 联系起来, 满足所有在 **353** 段推导图形 (D) 在曲线坐标式中的面积公式 (10) 时的条件①. 我们的目的是要变换积分 (13) 中的变量而将它表示为展布在区域 (Δ) 上的积分的形式.

因此我们用一个逐段光滑曲线网将区域 (Δ) 分成小区域 (Δ_i) $(i=1,2,\cdots,n)$; 于是区域 (D) 就被 (也是逐段光滑的) 相应曲线分成小区域 (D_i) (图 43, a, b). 在每一小区域 (D_i) 中各任取一点 (x_i,y_i); 最后, 做成积分 (13) 的积分和:

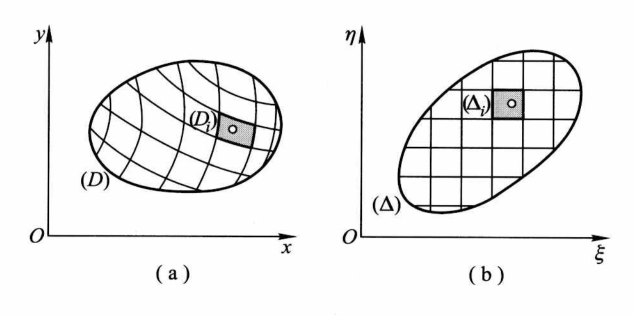


图 43

① 如此我们也假设二阶混合导数 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta}$ 和 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\xi}$ 存在并且连续. 参看 **353** 段脚注.

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)D_i,$$

它在区域 (D_i) 的最大直径趋于 0 时以该积分为其极限.

应用公式 (11) [**354** 段] 于每个小区域 (D_i), 我们有

$$D_i=|J(\overline{\xi}_i,\overline{\eta}_i)|\cdot\Delta_i,$$

这里 $(\overline{\xi}_i,\overline{\eta}_i)$ 是区域 (Δ_i) 内的一点. 代入积分和 σ 中得

$$\sigma=\sum_{i} f(x_i,y_i)|J(\overline{\xi}_i,\overline{\eta}_i)|\Delta_i.$$

点 $(\overline{\xi}_i,\overline{\eta}_i)$ 须依中值定理决定, 我们不能任意选取, 点 (x_i,y_i) 却是可以在区域 (D_i) 内完全任意地选取的. 利用这一任意性我们就令

$$x_i=x(\overline{\xi}_i,\overline{\eta}_i),\quad y_i=y(\overline{\xi}_i,\overline{\eta}_i),$$

即在 (D_i) 内选取其与 (Δ_i) 内的点 $(\overline{\xi}_i,\overline{\eta}_i)$ 相应之点作为点 (x_i,y_i). 于是积分和 σ 成这样:

$$\sigma=\sum_{i} f(x(\overline{\xi}_i,\overline{\eta}_i),y(\overline{\xi}_i,\overline{\eta}_i))|J(\overline{\xi}_i,\overline{\eta}_i)|\Delta_i;$$

在这形式之下它显然就是积分

$$\iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))|J(\xi,\eta)|d\xi d\eta \tag{14}$$

的积分和. 这个积分一定存在, 因为被积函数是连续的.

如果现在让所有区域 (Δ_i) 的直径都趋于 0, 则因函数 (1) 的连续性, 所有区域 (D_i) 的直径也随而趋于 0. 于是总和 σ 既应趋于积分 (13) 又应趋于积分 (14), 因为它同时是两个积分的积分和. 如此,

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))|J(\xi,\eta)|d\xi d\eta. \tag{15}$$

这个公式就解决了所提出的二重积分变量替换问题. 公式 (10) 显然就是它的特例, 在它里面取 $f(x,y)\equiv 1$ 就可得到.

如此, 在二重积分中作变量替换时, 不但要将函数 f 中的 x 和 y 换成它们的表达式 (1), 还要将面积元素 $dxdy$ 换成曲线坐标的表达式.

用类似 **354** 段, 4° 的推论法不难在此证明, 对变换 (1) 的条件在个别点上或线上不满足时的一系列情形公式 (15) 也仍保持正确.

357. 与单积分的相似 · 定向区域上的积分 二重积分变量替换公式与下列简单定积分的变量替换公式非常相似

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(\xi))x'(\xi)d\xi. \tag{16}$$

但在公式 (16) 中没有绝对值的记号, 这多少减弱了相似性. 这点差异很容易解释. 简单定积分是依据有向区间来取的 [**180** 段]: a 可以小于 b, 也可以大于 b, 同样 α 可以小于 β 也可以大于 β. 而二重积分则至今我们是只对无向区域来考虑的.

但是在二重积分的情形我们也可以来考虑有向区域. 区域的定向只要给界线以一定的环行方向 (正或负) 就行了 [**332** 段]; 同时这也就是区域内所有简单封闭曲线的环行方向. 如果选取的是正的环行方向, 就说该区域有正定向, 否则就说它有负定向.

如果一个区域 (D) 有正定向. 则其面积自然可以约定取寻常的面积而带上正号, 在相反的情形, 则带负号. 在区域 (D) 被分成小区域 (D_i) 时, 如上面所说, 这些小区域是依照全区域的定向法来定向的; 其面积也给予相应的正负号.

现在对有定向区域 (D) 可以仿照 **338** 段的样式来建立二重积分

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$$

的概念; 并且这个积分在区域有正定向时就与以前所下定义完全一致, 在有负定向时则差一正负号.

在二重积分的这一新观点之下, 首先我们就能将 **353** 段中曲线坐标面积公式 (10) 写成函数行列式上不加绝对值号的形式:

$$D = \iint\limits_{(\Delta)} \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} d\xi d\eta = \iint\limits_{(\Delta)} J(\xi,\eta) d\xi d\eta,$$

只要区域 (D) 和 (Δ) 是按上面所说方式定向的. 这可直接由 **354** 段的说明 1° 推出.

在同样条件下 **354** 段公式 (11) 也可不用绝对值号写成:

$$D = J(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \cdot \Delta,$$

按照这形式它就成了拉格朗日公式的自然推广.

最后, 一般公式 (15) 现在也可写成

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) J(\xi,\eta) d\xi d\eta.$$

这里区域 (D) 和 (Δ) 有相应的定向. 只要在统一的规定之下, 单积分和二重积分就会完全相似了.

但是, 以下我们仍恢复寻常的观点而考虑未定向区域上的二重积分.

358. 例 1) 我们来计算下列双纽线 (图 44) 所围图形的面积:

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2).$$

由于有二项式 x^2+y^2, 使人想到化为极坐标. 于是令

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

而按公式

$$D = \iint\limits_{(\Delta)} r dr d\theta \tag{17}$$

来计算所求的面积.

因为该曲线对称于坐标轴 (这不难由曲线的方程看出, 因为以 $-x$ 代 $x, -y$ 代 y 时方程不变), 所以只要决定该图形 (D) 在第一象限中的那部分面积然后四倍起来就行了.

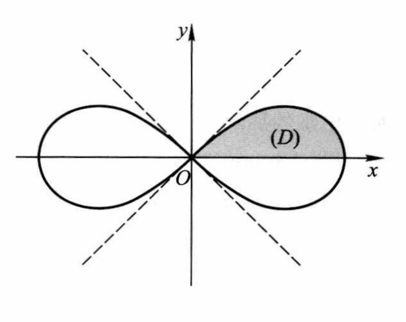


图 44

双纽线的极坐标方程是

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta,$$

并且 (如限于第一象限) θ 应只由 0 变至 $\frac{\pi}{4}$, 因为 $\cos 2\theta$ 应该是正的.

因此, $r\theta$ 平面上相应于 (D) 的区域 (Δ) 由曲线

$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$$

(双纽线的映像), r 轴的一段 (相应于 x 轴上的一段) 及 θ 轴由 $\theta = 0$ 至 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 的一段 (只是原点这一点的映像一一对应性被破坏了[①]) 所围.

我们有

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r dr = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{2},$$

如此所求全面积为 $2a^2$.

2) 现在我们说明另一种选择曲线坐标的方法, 它在决定曲线四边形面积时常常是有用的. 如果组成这曲线四边形对边的两对曲线分别属于各自充满平面并含有一个参变量的两个曲线族, 则自然可取这两个曲线族作为坐标线网. 其参变量通常就给出适宜于当前情形下的曲线坐标系.

我们举例来说明这种方法. 设要找由抛物线

$$y^2 = px, \quad y^2 = qx, \quad x^2 = ay, \quad x^2 = by,$$

$(0 < p < q, 0 < a < b)$ (图 45) 所围图形的面积.

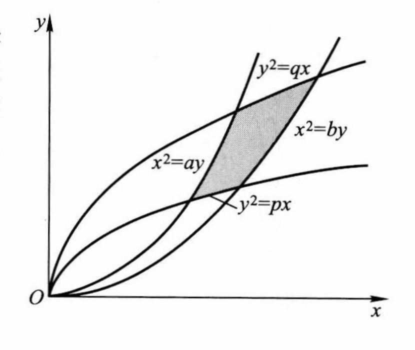


图 45

这里比较方便的是考虑这两族抛物线:

$$y^2 = \xi x \quad (p \leqslant \xi \leqslant q),$$

及

$$x^2 = \eta y \quad (a \leqslant \eta \leqslant b),$$

---

①关于这一点参看 **354** 段说明 4°.

每一族都充满我们的图形, 由它们可做成一个坐标线网, 这就等价于: 我们可取参变量 ξ 和 η 作曲线坐标, 所有这些我们已由 **352** 段, 2) 知道; 由上面各方程我们有: $x = \sqrt[3]{\xi\eta^2}$ 及 $y = \sqrt[3]{\xi^2\eta}$, 如此函数行列式

$$J = -\frac{1}{3}.$$

由此立即得出

$$D = \frac{1}{3}(q-p)(b-a).$$

3) 求球体 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2 = Rx$ 所切出来的那部分体积 V (所切成的立体有时称为 "维维亚尼 (Viviani)" 体, 以 17 世纪意大利这位数学家得名, 他最先对此感觉兴趣).

我们 [按 **336** 段公式 (2)] 有

$$V = 4\iint\limits_{(P)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy,$$

这里 (P) 是在 xy 平面第一象限里的半圆, 由 $x=0$ 和 $x^2+y^2=Rx$ 两线所围成.

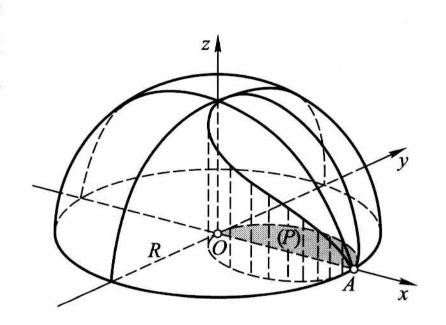


图 46

这个积分直接计算起来是麻烦的, 但它化为极坐标就可大为简化.

(P) 界线 (即半圆周) 的极坐标方程为 $r = R\cos\theta, \theta$ 由 0 变至 $\frac{\pi}{2}$. 如此,

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2-r^2}\cdot rdr = \frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta = \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

4) 在确定反常二重积分的存在 [**344** 段, 4) 及附注] 时, 利用极坐标常常是方便的, 例如我们来确定下列诸积分的存在 $(m>0)$:

(a) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}$ (奇点在原点);

(b) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^m}$ (奇线是围绕原点的单位圆);

(c) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}$ (延伸到无穷的区域).

在情形 (a) 我们有

$$\iint\limits_{0<\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} = 2\pi\int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r^{2m-1}},$$

它在 $\varepsilon \to 0$ 时趋于有限极限 $2\pi\displaystyle\int_0^1 \frac{dr}{r^{2m-1}}$ (但要 $2m-1<1$, 即要 $m<1$). 在情形 (b) 则当 $m<1$ 时

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant(1-\varepsilon)^2} \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^m} = 2\pi\int_0^{1-\varepsilon}\frac{rdr}{(1-r^2)^m} \to 2\pi\int_0^1 \frac{rdr}{(1-r^2)^m} \quad (\text{在}\varepsilon\to 0\text{时}).$$

最后, 对积分 (c) 则当 $2m-1>1$ 时, 也即 $m>1$ 时有

$$\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} = 2\pi\int_1^R \frac{dr}{r^{2m-1}} \to 2\pi\int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2m-1}} \quad (\text{在 } R\to+\infty \text{ 时}).$$

359. 史话 二重积分最初是欧拉引进的, 见于他在 1769 年提给彼得堡科学院的论文里, 首先他考虑某种不定二重积分 $\iint Zdxdy$, 这样一个 x 和 y 的函数, 它按某次序逐一对这些变量微分时即可得出 $Zdxdy$. 如此, 这个二重积分也就是累次积分

$$\int dx\int Zdy \quad \text{或} \quad \int dy\int Zdx,$$

并且其一般表达式含有一个 x 的任意函数及一个 y 的任意函数, 各作为一项.

然后, 结合立体体积及表面积计算问题欧拉引入了二重定积分, 将它同时解释为其元素之和及某种形态的累次积分. 如果先计算, 比如说, $\int Zdy$ (x 固定时), 则它展布在一般依赖于 x 的积分限之间的一切 y 值上. 结果得出一个 x 的一元函数 (不像不定积分中那样, 不是 x 和 y 的函数), 它已经可以在常数限① 间来积分. 所有积分限都可由考虑其 “底面” 定出 (欧拉称呼积分区域为 “底面”: 对于欧拉来说它事实上通常就是要求其体积或表面面积的那个立体的底面).

在上述欧拉论文里也讨论了二重积分号下变量替换问题. 在此假设原变量 x, y 是新变量 t, u 的函数, 而

$$dx = Rdt + Sdu, \quad dy = Tdt + Vdu, \tag{18}$$

如此 R, S, T, V 表示相应的偏导数. 新变量的变化界限可由原先的 “底面” 来决定. 将被积函数中的 x 和 y 以其 t 和 u 的表达式代入后, 剩下的问题就只是, 以什么来替换面积元素 $dxdy$?

欧拉马上放弃了直截了当以表达式 (18) 代替 dx 和 dy 的想法. 他还正确地指出, 一般说来 “没有任何合理的根据能说在计算中用来替代 $dxdy$ 的式子是应该与它相等的”: 重要的只是, 积分的最后结果应该一致. 同时为了使对新变量的积分也能看做累次积分, 这式子应该含有 $dtdu$, 即有 $Zdtdu$ 的形状.

为了找乘式 Z, 欧拉逐一引入新变量, 如此在每一步他只需在单积分中替换一个变量 (在内层积分中). 结果他导出表达式:

$$Z = ST - RV,$$

读者当不难认出这就是函数行列式. 但在欧拉还发生这 “疑难不解” 的情况: x 与 y 对调时可以得出完全相似的式子

$$Z = RV - ST,$$

而正负号却相反! 这是因为欧拉在此从未写出积分限并且未注意到其布列次序. 这困难由这样的想法来解决: 面积总应该是正的, 也就是说 Z 应该取作正的. 如此, 替换 $dxdy$ 的应该是表达式

$$|ST - RV|dtdu. \tag{19}$$

这个式子欧拉是以纯形式的运算得出的, 从未将它与面积元素 $dxdy$ 看作相等, 但也完全不说明其几何意义.

①在这论文里欧拉还未在积分上设积分限.

欧拉后若干年, 拉格朗日又搞起同样的变量替换问题, 但已经是三重积分的情形. 如果将他的想法搬到二重积分的情形, 则可以说拉格朗日试图证明, *面积元素仿佛就等于* (19) *式*.

到 1836 年, 奥斯特罗格拉茨基才在彼得堡科学院通报中标题为 "多重积分变量替换" 的论文里, 把这个问题完全搞清楚. 他首先以极坐标变量替换的简单例子证明了拉格朗日的想法是不对的. 然后他给了这问题的原始叙述, 大致就像上面 **355** 段转载的那样. (19) 式有了清楚的几何解释, 即元素曲线四边形[①]的面积, 并且充分说明了必须考虑行列式绝对值的理由.

①这完全不必等于元素矩形的面积.

第二十二章　曲面面积 · 面积分

§1. 双侧曲面

360. 曲面的参变表示法　我们回到空间中曲面的分析表示法问题 [参看 **213** 段], 而来细讲一种读者还不熟悉的而又很重要的分析表示法, 所谓参变表示法.

在 **212** 段已经谈到过空间内曲线的参变表示法 [参看该处 (15) 式]:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \tag{1}$$

如此曲线上点的位置就由一个在某区间内变化的参变量 t 的值所决定. 在显式方程, 比如说

$$z = f(x, y), \tag{2}$$

所给出的曲面上决定点的位置我们已经牵涉到两个参变量, 即横坐标 x 及纵坐标 y. 在一般情形, 参变量是两个任意的变量 u 和 v, 而曲面的参变表示法就成三个方程

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)^{①}, \tag{3}$$

这里函数 φ, ψ, χ 都在 "参变量 uv 平面" 的上某区域 (Δ) 中有定义并且连续.

重要的是这一种情形: 曲面的每个点只能由一对参变值得出, 如此方程 (3) 在曲面的点与平面区域 (Δ) 的点之间建立了一种一一对应关系; 这样的曲面叫做简单曲面. 在此我们假设区域 (Δ) 和曲面都由简单闭界线所围; 它们必须按公式 (3) 彼此对应.

①用两个参变量给出曲面的办法始创于欧拉, 而高斯则特别广泛而有效地在微分几何中加以利用.

参变量 u 和 v 称为相应点的曲线坐标. 如果在方程 (3) 中固定其一个曲线坐标的值, 比如说, 令 $u = u_0$, 则显然得到一条曲线的方程:

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \psi(u_0, v), \quad z = \chi(u_0, v),$$

这一曲线的所有点都落在该曲面上. 让 u_0 的值变化, 则得一整族这种 "(u) 曲线". 同样, 固定一值 $v = v_0$, 也就得到该曲面上一条曲线

$$x = \varphi(u, v_0), \quad y = \psi(u, v_0), \quad z = \chi(u, v_0);$$

这种 "(v) 曲线" 也组成一曲线族. 所有这类曲线都叫做*曲面的坐标线*. 如果是简单曲面, 则通过其任何一点都恰有每族的一条坐标线.

所有这些, 读者都已熟悉, 但只限于曲面是*平面的*情形 [参看 **352** 段].

现在我们假设函数 (3) 不但连续同时还在区域 (Δ) 中有一阶的连续导函数, 并且来考虑函数矩阵

$$\begin{pmatrix} \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix}. \tag{4}$$

设对于决定曲面上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的参变量值 (u_0, v_0), 在矩阵 (4) 中至少有一个二阶行列式异于 0, 比如说设

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

于是, 将方程 (3) 前两式写成

$$\varphi(u, v) - x = 0, \quad \psi(u, v) - y = 0$$

的形式, 就可根据 **317** 段定理 3 断言这组带四个变量 u, v, x, y 的方程 (如果限于 u_0, v_0, x_0, y_0 邻近的值) 将变量 u, v 决定为 x, y 的单值函数: $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 它们连同其导数都是连续的. 最后, 将这两个 u, v 的表达式代入方程 (3) 中第三式, 则*曲面环绕点 M_0 的部分就表示成 (2) 型的显式方程*

$$z = \chi(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y),$$

而 f 也是连续函数并且有连续的导函数.

只有在矩阵 (4) 的三个行列式全等于 0 时 (在这情形曲面上相应点 M_0 称为奇点) 这种表示法可能做不到.

我们在简单曲面 (3) 上任取一个*非奇点* $M(x, y, z)$. 于是, 如刚才已看到的, 在其某一邻域内该曲面可用某种显式方程来表出, 所以 [**213** 段] 在点 M 上有*切面*. 这切面的方程可写成

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0^{①} \tag{5}$$

① 习惯上用 X, Y, Z 表示流动坐标, 以表示与曲面上定点的坐标 x, y, z 有区别.

的形式, 这里系数 A, B, C 尚待决定.

如果在曲面方程中将 v 固定为与所选取的点 M 相应的值, 则得出通过此点的 "(v) 曲线" 的方程. 此曲线在点 M 的切线可由方程

$$\frac{X-x}{x'_u}=\frac{Y-y}{y'_u}=\frac{Z-z}{z'_u}$$

表出 [**212** 段, (16)]. 同样, 固定 u, 则得另一通过点 M 的坐标线 ("(u) 曲线") 而在该点有切线

$$\frac{X-x}{x'_v}=\frac{Y-y}{y'_v}=\frac{Z-z}{z'_v}.$$

因为这两条切线都应该落在平面 (5) 上, 故成立这样的条件:

$$Ax'_u+By'_u+Cz'_u=0,$$
$$Ax'_v+By'_v+Cz'_v=0.$$

在这样的情形系数 A, B, C 应与矩阵

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} \text{①} \tag{4a}$$

的诸二阶行列式成比例. 通常不妨设它们就等于这些行列式, 如此, 今后不妨总认为

$$A=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}. \tag{6}$$

我们还指出, 法线的方向余弦为

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\mu=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\nu=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

至今我们只限于考虑简单曲面. 在一般情形我们将考虑以曲线为界的曲面以及由有限多块彼此衔接而不交叉的简单曲面所组成的闭曲面. 如果这种 "一般形式" 的曲面也能表示成参变方程 (3), 则显然其他的点与平面区域 (Δ) 的点之间难免有失去一一对应关系的时候.

例 1) 我们来看一个半径为 R、球心在原点的球面 (图 47): $x^2+y^2+z^2=R^2$. 要得出它的寻常参变表示法我们作一 "赤道" 截线 AKA', 而通过两 "极" P, P' 和所考虑的点 M 作一 "经线" $PMKP'$. 点 M 在球面上的位置可由角 $\varphi=\angle POM$ 及 $\theta=\angle AOK$ 决定. 然后, $ON=R\sin\varphi$, 而坐标 x 和 y (对点 M 及点 N 都同是它们) 可由 ON 表出: $x=ON\cos\theta$, $y=ON\sin\theta$, 最后得出球的参变方程如下:

$$x=R\sin\varphi\cos\theta,\quad y=R\sin\varphi\sin\theta,\quad z=R\cos\varphi,$$

①这个矩阵与矩阵 (4) 只在表示法上不同. 要记得, 在所考虑的点上其行列式不全是 0.

这里角 φ 只要由 0 变到 π, 而角 θ 由 0 变到 2π.

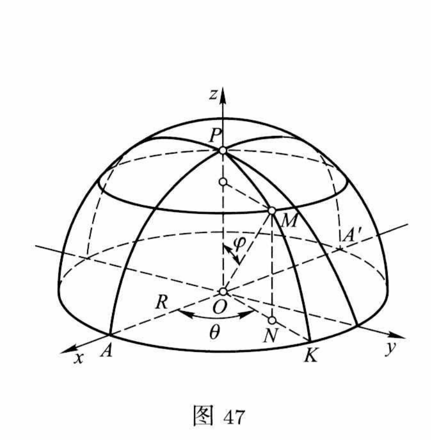


图 47

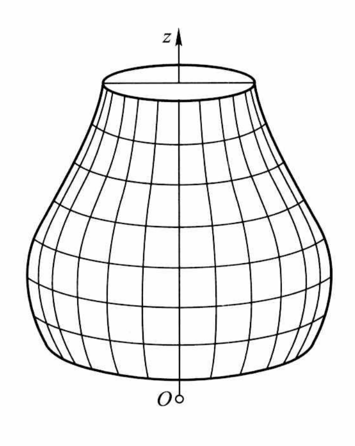


图 48

但球面上的点与 $\varphi\theta$ 平面上矩形 $[0,\pi;0,2\pi]$ 的点之间的对应关系不是一对一的: 不但 $\theta=0$ 及 $\theta=2\pi$ 两值给出曲面上同一点, 在 $\varphi=0$ (或 π) 而 θ 取任何值时也只得出一点, 即极点 P (或 P').

不难看出, 球面上一族坐标线是经线 ($\theta=$ 常数), 另一族是纬线 (平行圆 $\varphi=$ 常数).

2) 上例可推广如下, 设在 xz 平面内由参变方程

$$x=\varphi(u),\quad z=\psi(u)\quad (\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$$

给出了一条曲线 ("母线"), 将它作为刚体绕 z 轴旋转 (图 48). 如果以 v 表示旋转角, 则所得旋转面的方程可写成:

$$x=\varphi(u)\cos v,\quad y=\varphi(u)\sin v,\quad z=\psi(u)\quad (\alpha\leqslant u\leqslant\beta, 0\leqslant v\leqslant 2\pi).$$

如果在 xz 平面中取半圆

$$x=R\sin u,\quad z=R\cos u\quad (0\leqslant u\leqslant\pi)$$

而绕 z 轴旋转, 则可得出这样形成的球面的参变表出法, 其形式仍和前面一样 (只是记号上有差别).

这里坐标线也就是母线的种种位置 (经线) 和平行的圆.

361. 曲面的侧 我们来建立曲面的侧这一个以后很重要的概念.

这个概念在许多情形下直观上是明显的. 如果曲面由 $z=f(x,y)$ 这样的显式方程给出, 则可以说所谓曲面的上侧或下侧①. 如果曲面包着一个立体, 则也不难设想其有两侧之别 —— 一侧向内, 指向该立体, 一侧向外, 指向环绕该立体的空间.

由这直观概念出发, 我们现在试图来给曲面的侧的概念下一个明确的定义.

我们考虑一个曲面 (S), 不论其封闭与否, 而假设其每点上都有一个一定的切面, 其位置随切点而连续变化.

① 这类说法我们常常用到 (在此默认 z 轴本身是垂直向上的).

在曲面上取定一点 M, 通过它作一法线, 给以一定的方向 —— 两个可能方向 (彼此间的区别表现在方向余弦的正负号) 之一, 在曲面上作一闭曲线, 由 M_0 出发并回到 M_0, 并假设它不越过曲面的边界 (如果有边界的话), 令点 M 沿这闭路环行, 并且在其各个位置都给法线一个方向, 这方向就是由在 M_0 处所选方向连续转变过来的. 此时可发生下列两种情形之一: 经环行一周而回到点 M_0 时, 法线方向仍与出发时相同, 或者与出发时相反.

如果对某一点 M_0 及某一通过 M_0 的闭路 M_0AM_0 发生的是后一种情形, 则对任一别的点 M_1 也不难作一闭路, 它由 M_1 出发而回到 M_1 时在此点上法线的方向也与出发时相反. 例如, $M_1M_0AM_0M_1$ 就是这样的闭路, 只要我们将 M_1M_0 理解为曲面上联结 M_1 与 M_0 两点而不越过边界的曲线, M_0M_1 理解为同一曲线但方向相反. 在这样的情形曲面就叫做*单侧的*. 所谓*默比乌斯带*就是这种曲面的一个经典的例子 (图 49). 它的模型可以这样做法: 取一矩形纸条 $ABCD$, 扭转一次再将两端粘在一起, 使 A 与 C 合, B 与 D 合. 如果要给这条扭成的带圈连续地刷上一种颜色, 则不必经过边缘即可刷遍全带, 但这种曲面今后不在我们考虑之列.

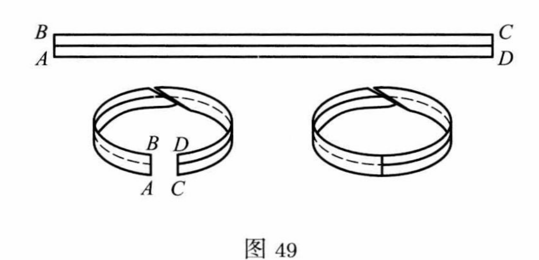


图 49

现在假设无论点 M_0 怎样取法, 以及通过点 M_0 而不越过边界的闭路怎样取法, 沿此道路环行一周而回到起点 M_0 时, 法线方向总与当初所定的相同. 在这样条件下该曲面就称为*双侧的*.

设 S 是一个双侧曲面, 在 S 上任取一点 M_1 并给这点上的法线一个确定的方向. 任取曲面上另一点 M_1, 而以曲面上任一不越过其边界的道路 (K) 将 M_0 与 M_1 联结起来, 并且令点 M 沿这道路由 M_0 走到 M_1. 如果此时法线的方向连续地变化, 则点 M 到达 M_1 的位置时当带有一定的法线方向, 而与道路 (K) 的选择法无关. 事实上, 如果点 M 沿两条不同道路 (K_1) 和 (K_2) 由点 M_0 走到点 M_1 时我们在点 M_1 竟得出不同的法线方向, 则闭路 $M_0(K_1)M_1(K_2^{-1})M_0$① 将使到达点 M_0 时法线方向与当初相反, 这与两侧曲面定义冲突.

如此, 在双侧曲面上只要对一个点选定了法线的方向, 则其在一切点上的法线方向也就依之唯一地决定. *曲面上点的全体, 连同在各点处按上述法则给予其法线的方向, 合起来叫做***曲面的一侧**.

① (K_2^{-1}) 就指曲线 (K_2), 但是以相反方向描出的 —— 由 M_1 至 M_0.

例 1) 双侧曲面最简单最重要的例子是由显式方程 $z = z(x, y)$ 所表出的曲面, 这里假设函数 z 在某区域 (D) 中连续并且有连续偏导函数

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad 和 \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

在这情形曲面的法线方向余弦可表示成 [**213** 段, (24)]:

$$\cos\lambda = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\mu = \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\nu = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{8}$$

在根号前选定了正负号, 我们就在曲面的所有点上都确定了一定的法线方向. 因为按假设方向余弦是点的坐标的连续函数, 则所确定的法线方向也就随点的位置而连续变化. 由此可见, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ 公式中根式前正负号的选择就在上面所说的意义下决定了曲面的一侧.

如果在根式前取正号, 则在曲面所有点上

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

是正的, 即相应于所选定一侧的法线与 z 轴成锐角. 如此, 由这正负号所选定的曲面一侧是上侧. 反之, 在法线方向余弦表达式中选负号就确定曲面的下侧: 法线与 z 轴成钝角.

2) 现在来考虑一种更一般的任意简单曲面 (S), 它由参变方程

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \tag{3a}$$

给出, 这里参变量在 uv 平面上某一有界区域 (Δ) 内变化. 我们假设这曲面是光滑的: 这就是说函数 (3a) 连同其偏导数都在 (Δ) 内连续并且在曲面上没有奇点.

对于曲面法线的方向余弦我们有了公式 (7). 而在这情形根式前正负号的选择也决定曲面的侧, 如此该曲线是双侧的.

事实上, 正负号一经选定, 公式 (7) 就给曲面的每个点 (因与它相应的只有一对 u, v 的值!) 配上一个一定的法线方向, 它随着点的移动而连续变化.

如果不假设曲面是简单的, 则不能无条件地肯定它是双侧的. 在这情形可以找到曲面上一点 M_0, 它相应于两对不同的参变量值 u_0v_0 和 u_1v_1, 对于这些值即使公式 (7) 的根式前正负号选取得一样, 它也仍可能在点 M_0 决定出相反的法线方向. 如果情形的确如此, 则该曲面就是单侧的.

附注 如果曲面 (S) 是封闭的并且包围着一个立体, 则 [**360** 段] 虽然它也能用方程 (3a) 表出, 但这时曲面上的点与平面区域 (Δ) 的点之间一一对应的假设已不完全实现. 可是既然曲面显然有内外两侧, 在这情形公式 (7) 中正负号的选择仍然决定曲面的侧.

362. 曲面的定向法及其侧的选定 设 (S) 是由简单界线 (L) 所围成的一个简单光滑曲面, 我们选定这曲面的一侧. 现在照下面的法则给界线 (L) 规定一个环行方向作为正的: 设想一个观察者沿该界线循所给环行方向进行并且相应于所选定曲面一侧的法线是由他的脚指向他的头时, 这个环行方向由他看来应该是反时针方向的, “反时针” 一语, 说得明确一点就是, 他近处那部分曲面在他看来应该是落在他的左边. 同一法则同时也给曲面上每一包围曲面一部分 ① 的闭曲线建立了正的环行方向. 与此相反的环行方向就叫做负的.

① 在确定界线正向时只需考虑这个部分.

所有这些合起来这就是曲面定向概念的内容.

如果由曲面另一侧出发, 则法线应变为相反的方向, 观察者的位置也要改变, 因此按我们的法则界线 (L) 及曲面上其他闭曲线环行方向的正负也要对调. 总之, 曲面改变其定向法. 如此, 只要总保持着所建立的这个法则, 则选定了曲面的侧也就确定了其定向法, 反之, 曲面界线的环行正向的选定也就唯一地确定曲面的一侧.

附注 这个法则依据的是反时针旋转, 并且为了避免混乱我们将经常由它出发.

这个旋转方向也可与空间坐标轴的布列法本身联系起来, 即在所有这旋转方向有意义的问题中我们将采用所谓右手坐标系 (图 50(a)), 其坐标轴是如此布列的: 设想靠 z 轴正的部分站着一个人, 那么在他看来由 x 轴到 z 轴的旋转 $\left(\text{转过 } +\frac{\pi}{2} \text{ 角}\right)$ 是反时针方向的①. (对于图 50(b) 所表示的坐标系, 则此旋转是顺时针方向的②, 这种坐标系称为左手坐标系).

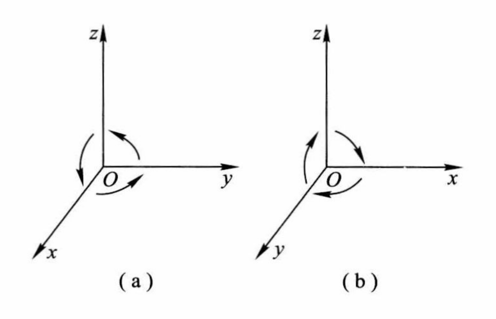


图 50

现在将前面所讲关于曲面定侧与曲面定向间关系的思想应用于曲面法线方向余弦公式 (7) 中正负号的选择问题.

回到本段开头所考虑曲面 (S), 认为它上面已定了侧并从而也定了向. 该曲面的界线 (L) 相应于 "参变量 uv 的平面" 上区域 (Δ) 的界线 (Λ). 我们假设 (这总是不难做到的) 与界线 (Λ) 的正向相应的是界线 (L) 的正向. 于是对区域 (Δ) 中任何闭路 (λ) 与曲面 (S) 上相应闭路 (l) 而言也是如此: (λ) 的正向环行相应于 (l) 的正向环行.③

在这些条件之下, 为了表明选定的那一侧法线方向余弦公式 (7) 中根式前须取正号.

要证明这话只要证明在一个点上由这些带正号的公式所决定的方向与所需要的法线方向一致就行了. 我们在曲面上取任一内点 M_0; 与它相应的有区域 (Δ) 内一点 $m_0(u_0, v_0)$. 设在此点有行列式, 比如说

$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

不等于 0. 于是可在 uv 平面上找到点 m_0 的一个由闭路 (λ) 所围的小邻域, 使在曲面 (S) 上和它相应的由闭路 (l) 所围的点 M_0 的邻域能由一个显式方程 $z = f(x, y)$ [**360** 段] 表出, 因此它可一一对应地投影到 xy 平面上. 我们以 (k) 表示 xy 平面上

①② 将字母 xyz 轮换时也如此.

③因为闭路的环行方向可按其任一部分的描出方向来判定, 故上述结论对于与 (Λ) 有共同部分的闭路 (λ) 而言显然是对的, 于是也不难扩充到一般情形上去.

这一投影的界线 (图 51).

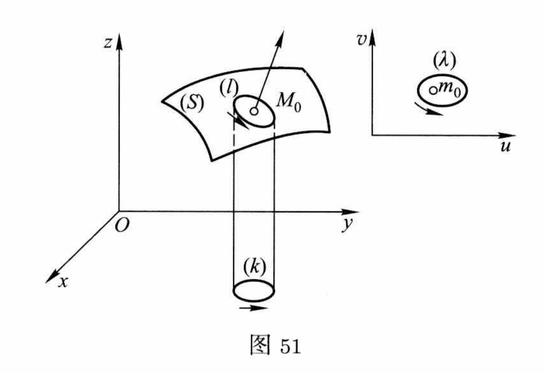


图 51

如果在所考虑的点上及其邻域内行列式 $C>0$, 则闭路 (λ) 的正向环行相应于闭路 (k) 的正向环行 (即在所选定坐标轴布列法之下的反时针方向环行) [参看 **354** 段, 1)]. 由图可看出, 要曲面上相应于闭路 (l) 的方向也是反时针方向的, 则须由上面朝它看, 因此在这情形点 M_0 处的法线应该是向上的, 即应与 z 轴成锐角. 公式 (7) 中如果取正号就有这样的情形, 因为 $C>0$ 时 $\cos\nu>0$. 反之, $C<0$ 时法线应与 z 轴成钝角, 这在上述正负号选取法之下事实上也成立, 因为 $C<0$ 时 $\cos\nu<0$.

363. 逐段光滑曲面的情形 **362** 段所阐述的想法还给出将曲面定侧概念推广于逐段简单光滑曲面的一般情形时的一种便利的工具. 这种曲面为简单起见我们将称之为逐段光滑曲面, **361** 段所讲的想法在这情形不能直接应用, 因为沿那些衔接各段光滑曲面的 "棱" 一般没有确定的切面, 并且通过这些棱时法线方向谈不到连续变化.

设给了一个曲面 (S), 由简单光滑片段 $(S_1),(S_2),\cdots$ 所组成, 彼此沿棱 (即边界的公共部分) 衔接在一起. 首先假设这些片段每片分开来都成双侧曲面. 但这当然不足使整个曲面 (S) 合起来成双侧曲面. 像默比乌斯带就是可以由两片简单光滑双侧曲面组合起来的.

在每片 (S_i) $(i=1,2,\cdots)$ 的边界 (K_i) 上的两个方向中各取其一作为正向; 如此, 我们知道, 曲面 (S_i) 就定了侧. 这选择法如能做得使两个邻接的边界在其公共部分[①] 上总有相反的环行方向 (图 52), 则只有这时候曲面 (S) 是双侧的才行. 曲面 (S) 的侧即以其由上述方式所选定各片段之侧合起来为其定义.

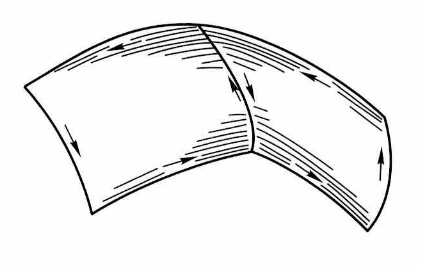


图 52

如果在一个片段上边界的环行改换了方向, 则为了遵守我们的条件必须在所有各片段的边界上也都这样做. 于是各片曲面 (S_i) 所选定的侧都要代之以相反的侧; 这些相反的

[①] 这公共边界仍可由若干段组成.

侧总起来就组成曲面的第二侧.

362 段关于曲面定侧与定向关系的想法对有边界的一般曲面仍保持有效.

§2. 曲面面积

364. 施瓦茨的例 曲面面积概念与曲线长概念有相似之处. 我们已定义 (开) 弧之长为内接折线周长在其所有各边之长趋于 0 时的极限. 在曲面的情形 (比如说也是开的) 自然会考虑其中内接多面形并定义曲面面积为该多面形面积在各面直径趋于 0 时的极限.

但在 19 世纪末已经发现这个定义是不能用的. 在 1883 年施瓦茨指出了上述极限甚至对简单的直圆柱面情形已不存在. 我们来看看这个有教益的例子.

设给了一个这样的圆柱面, 其半径为 R, 其高为 H. 在其中作内接多面形如下. 将柱高分为 m 等份, 通过每一分点作垂直于柱轴的平面, 如此在其面上得 $m+1$ 个圆周 (其中也包括圆柱的上下两底的圆周), 将这些圆周每个又分为 n 等份, 使上一圆周的分点恰与下一圆周的弧的中点相对.

其次作出所有各段圆弧之弦, 并将每弦两端与上下两圆周上与其中点相对的分点用线段联结起来 (图 53), 如此得许多三角形. 这些三角形总数为 $2mn$ 个并且是相等的, 它们合起来就形成一个我们所需要的多面形 $(\Sigma_{m,a})$; 其模型如图 54.

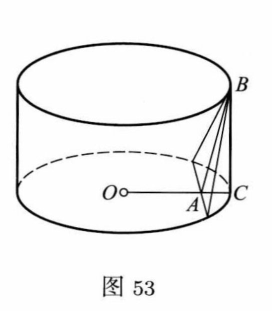


图 53

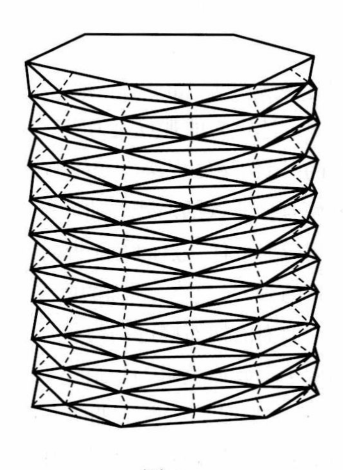


图 54

现在来计算每个三角形的面积 σ. 取弦作三角形的底, 其长等于

$$2R\sin\frac{\pi}{n}$$

求三角形的高 AB 时 (参看图 53) 我们注意 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$, 而

$$AC=OC-OA=R\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right),\quad BC=\frac{H}{m}.$$

如此, 一个三角形的面积等于

$$\sigma = R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\left(\frac{H}{m}\right)^2},$$

而全多面形的面积为

$$\Sigma_{m,n} = 2mn\sigma = 2R\cdot n\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+H^2}.$$

当 m 和 n 无限增大时, 所有三角形的直径都趋于 0, 但面积 $\Sigma_{m,n}$ 没有极限. 事实上, 我们假设 m 和 n 这样增大, 使比率 $\frac{m}{n^2}$ 趋于一个定极限 q:

$$\lim\frac{m}{n^2} = q.$$

我们有

$$\lim n\sin\frac{\pi}{n} = \pi,$$

而另一方面由所作假设则有

$$\lim m\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) = \lim m\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2n} = \lim\frac{\pi^2}{2}\frac{m}{n^2} = \frac{\pi^2}{2}q,$$

所以

$$\lim\Sigma_{m,n} = 2\pi R\sqrt{\frac{\pi^4R^2}{4}q^2+H^2},$$

而我们可看出这个极限实质上依赖 q 的大小, 即依赖 m 与 n 同时增大的方式. 在 $q=0$ 时, 并且也只有在这情形, 该极限等于 $2\pi RH$ (这就是初等几何中所导出的该面积的值), 但它甚至可以与 q 同时变成无穷大. 如此, 在 m 与 n 独立增至无穷大时面积 $\Sigma_{m,n}$ 事实上没有确定的极限, 而圆柱面按照上述定义的观点成为没有面积的.

要紧的是要了解, 内接于曲线的折线与内接于曲面的多面形之间情形有怎样的区别. 为简单起见我们姑且把所谈的曲线和曲面都算作是光滑的, 于是只要组成折线的弦充分地小, 则每一弦的方向与相应弧上任一点的切线方向要相差多小就多小. 所以这种无穷小弦可以越来越精确地当作相应弧长的元素. 反之, 曲面的内接多边形, 虽然面积要多小就多小, 但它在空间的位置上却可以完全不与曲面的切面接近. 在这情形用它来替代曲面的元素显然是不行的. 这种情况可以用刚才所举的例子很好地说明: 柱面的切面全是*垂直的*, 而内接于柱面的三角形则在 q 很大时几乎成为水平的, 如此形成了一些微细的皱褶.

365. 显式方程所给曲面的面积 由于前一段所指出的情形, 我们须另求建立曲面面积概念的途径. 现在指出这种途径之一, 它虽然简单, 但也带有一些人为的色彩, 而我们就由显式方程

$$z = f(x,y) \tag{1}$$

所给的曲面 (S) 这一情形开始. 设 x, y 在 xy 平面上正方区域 (D) 内变化, 并且 z 在这区域内有连续偏导数

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad 及 \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

我们用 (零面积) 曲线网将区域 (D) 分为元素

$$(D_1), (D_2), \cdots, (D_n)$$

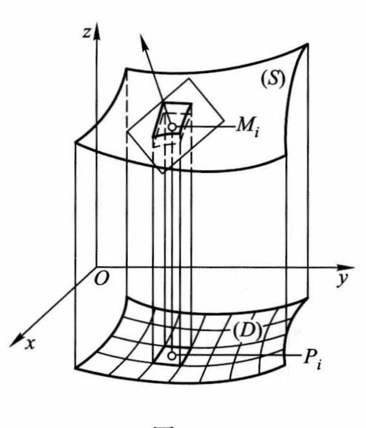


图 55

并且来考虑其中一个元素 (D_i). 如果在这小分域的边界上作为准线建立一个柱面, 其母线平行于 z 轴, 则它在曲面 (S) 上切出一个元素 (S_i). 在 (D_i) 取任意一点 $P_i(x_i, y_i)$, 而在曲面 (S) 上相应点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$ 处 [此处 $z_i = f(x_i, y_i)$] 作一个切面. 上面所说的柱面也在切面上切一个元素图形 (T_i) (图 55), 它的面积 T_i 看来可作面积元素 (S_i) 的近似值.

如此, 所有这种面积之和

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

可以看作曲面 (S) 的面积的近似值. 我们将这曲面的面积 S 定义为当所有元素 (S_i) 的直径趋于 0 时也即所有平面元素 (D_i) 趋于 0 时, 上列式子的极限:

$$S = \lim \sigma = \lim \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

现在不难证明, S 可表示为二重积分

$$S = \iint_{(D)} \frac{1}{|\cos \nu|} dxdy, \tag{2}$$

这里 ν 也如惯例表示曲面法线与 z 轴间的角①.

事实上, 如果 ν_i 就是相应于点 M_i 的 ν 值, 则平面图形 (T_i) 和 (D_i) (这里第二个是第一个的垂直投影) 的面积之间有这样的关系:

$$D_i = T_i \cdot |\cos \nu_i|,$$

由此有

$$T_i = \frac{1}{|\cos \nu_i|} \cdot D_i.$$

总和

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\cos \nu_i|} \cdot D_i$$

①读者注意到由显式方程 (1) 所给曲面的面积表达式 (2) 与 **328** 段由显式方程 $y = f(x)$ 给出的曲线的弧长表达式 (7) 之间完全相似.

是二重积分 (2) 的积分和, 因此在上述极限过程之下趋于该积分为其极限, 这就是所求证的.

如果回忆 **361** 段中公式 (8), 则由其中第三个关系式所得结果可以写成:

$$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy; \tag{2a}$$

积分 (2) 或 (2a) 的存在可由偏导数 p 和 q 的连续性假设推出.

附注 这个面积 S 的简单定义的主要缺点有二: 第一, 它只适用于显式方程表出的曲面; 第二, 它看起来与坐标系的选择法有关. 我们在下一段再来讨论这个问题.

366. 一般情形的曲面面积 现在我们来考虑一个由参变方程所给出的曲面 (S).

设 M 是它上面的一点, 并且在这点上, 比如说, $C \neq 0$, 于是, 依据 **360** 段中所讲的, 可以下这样的结论: 存在曲面 (S) 的一个部分 (s), 它围绕点 M, 并具有下列性质:

1°. 曲面 (s) 可以用 (1) 那样的显式方程表出;

2°. 如果以 (δ) 表示 uv 平面上的区域 (Δ) 的相应部分, 则在 (δ) 内行列式 $C \neq 0$.

这对曲面的每个点 M 都是对的, 只是在该点异于 0 的也可以是行列式 A 或 B, 此时 (1) 那样的显式方程就相应地换成另一形状的显式方程

$$x = h(y,z) \quad 或 \quad y = g(z,x).$$

由此推知 (我们在此不证明了), 整个曲面 (S) 可分解为有限多个像 (s) 那样的片段. 我们依据前面的定义来细讲片段 (s) 的面积的计算.

如果 (d) 是 (s) 在 xy 平面上的投影, 则我们知道 [参看 (2)] 它的面积

$$s = \iint\limits_{(d)} \frac{dxdy}{|\cos\nu|}. \tag{3}$$

因为区域 (d) 的点与区域 (δ) 的点有一一对应的关系, 并且还满足 **352** 段和 **356** 段中另外一些条件, 故在积分 (3) 中可以按 **356** 段公式 (15) 变换为变量 u, v. 现在函数行列式

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = C,$$

而

$$|\cos\nu| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

[参看 **360** 段, (7)], 故结果得出

$$s = \iint\limits_{(\delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv. \tag{4}$$

值得注意的是, 这个式子是对 A, B, C 对称的, 其中完全没有反映出我们假设了行列式 C 在 (δ) 内异于 0 以及曲面 (s) 系由 (1) 形显式方程所表出这些情况: 在不同的可能假设下得出同样结果!

现在将全曲面 (S) 的面积 S 定义为其各部分 (s) 的面积 s 的总和. 把所有 (4) 形等式加起来, 得最后的公式

$$S = \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv, \tag{5}$$

显然, 这与曲面 (S) 的划分法无关.

附注 我们来证明, 面积 (5) 的值事实上与曲面 (S) 的参变表达式的选择法无关.

设由变域为 (Δ) 的参变量 u, v 转换为变域 $(\overline{\Delta})$ 的参变量 $\overline{u}, \overline{v}$, 变换公式

$$u = U(\overline{u}, \overline{v}), \quad v = V(\overline{u}, \overline{v}),$$

在这二区域间建立了一一对应的关系 (函数 U 和 V 连同其导数都假设是连续的), 于是该曲面表示为新的方程

$$x = \overline{x}(\overline{u}, \overline{v}), \quad y = \overline{y}(\overline{u}, \overline{v}), \quad z = \overline{z}(\overline{u}, \overline{v});$$

设在这表示法之下它也没有奇点. 令

$$J = \frac{D(u, v)}{D(\overline{u}, \overline{v})},$$

我们有①

$$\overline{A} = AJ, \quad \overline{B} = BJ, \quad \overline{C} = CJ$$

[**325** 段]. 由此顺便可看出, J 在 $(\overline{\Delta})$ 中异于 0, 因为否则该曲面在新表示法之下就有奇点了. 现在按变量替换公式立即得出

$$S = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} |J| d\overline{u} d\overline{v} = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} \sqrt{\overline{A}^2 + \overline{B}^2 + \overline{C}^2} d\overline{u} d\overline{v},$$

这就是所求证的.

要给公式 (5) 另一形式 (这也正是通常所采用的) 我们将矩阵

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

乘其转置矩阵并做成行列式

$$\begin{vmatrix} x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u & x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \\ x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v & x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v \end{vmatrix};$$

①记号的意义是显然的.

按一个熟悉的代数定理 [参看 **326** 段] 它就等于 $A^2+B^2+C^2$. 通常令

$$x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2=E,\quad x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v'=F,$$
$$x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2=G$$

—— 这就是所谓高斯曲面系数, 在微分几何中占有重要地位, 在这样表示法之下有

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2,$$

如此公式 (5) 可以写成这样:

$$S=\iint\limits_{(\Delta)}\sqrt{EG-F^2}dudv. \tag{5a}$$

这里表达式

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv=\sqrt{EG-F^2}dudv \tag{6}$$

叫做曲线坐标下的面积元素.

附注 借助公式 (5a), 用矢量分析中的初等想法, 不难证明面积 S 的表达式与坐标系选择法无关, 因为 E, F, G 各式在坐标变换之下不变其值.

至今我们只限于简单光滑曲面的情形. 如果曲面不属这种情形, 但可分为有限多个简单而光滑的片段, 则我们称各片段面积之总和为全曲面的面积. 在此不难证明, 这样所定义的面积事实上与曲面分解为所需类型的片段的分法无关. 设整个所给的曲面由参变方程所表出, 但在个别点上或线上一一对应的关系可能不成立, 则在这一般情形其面积仍可由公式 (5) 或 (5a) 表出 [参看 **354** 段, 4°].

有面积的曲面称为可求积的.

367. 例 1) 试求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被柱面 $x^2+y^2=Rx$ 所切下的那部分 [即 "维维亚尼体" 的上下底, 参看 **358** 段, 3); 图 46] 的面积.

解 对上底我们有

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad p=-\frac{x}{z},\quad q=-\frac{y}{z},$$
$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

并因此有

$$S=2R\iint\limits_{(D)}\frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

这里积分区域是圆周 $x^2+y^2=Rx$ 所围的圆.

化为极坐标, 得 [参看 **358**, 3)]

$$S=4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

做出积分, 最后求得

$$S = 4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

因为半球的面积等于 $2\pi R^2$, 故除出 "维维亚尼体" 后所剩下那部分面积等于 $4R^2$, 如此它可用半径 R 表出而完全不含无理数, 维维亚尼还把这个吸引他注意的情形和同时代人对他提出的一个问题联系起来. 我们注意, 上述那部分半球的体积可表示为不含无理数的式子: 它就等于 $\frac{8}{9}R^3$ [**358** 段, 3)].

附注 对上面所做的计算, 事实上还需要一点说明, 因为在点 $(R,0,0)$ 上导函数 p 和 q 不连续, 因此积分号下的式子也不连续; 参看 2).

2) 试利用球面的参变表出法

$$x = R\sin\varphi\cos\theta,\quad y = R\sin\varphi\sin\theta,\quad z = R\cos\varphi$$
$$(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

来解问题 1),

依据导数矩阵

$$\begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

不难找出球的高斯系数:

$$E = R^2,\quad F = 0,\quad G = R^2\sin^2\varphi,$$

如此 $\sqrt{EG-F^2} = R^2\sin\varphi$.

我们不妨只考虑所要研究的曲面在第一卦限中的那四分之一. 对于 "维维亚尼" 曲线上的点, 即球与圆柱交线 (在第一卦限中的部分) 上的点, 我们有 $\varphi+\theta = \frac{\pi}{2}$.

事实上, 将 x 和 y 表示为 φ 和 θ 的式子代入圆柱方程 $x^2+y^2 = Rx$, 得 $\sin\varphi = \cos\theta$, 并且因对所考虑的点显然有 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, 故由此得出 $\varphi+\theta = \frac{\pi}{2}$.

根据上述确定了参变量 φ 和 θ 的变化范围后我们由公式 (5a) 得

$$S = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}\sin\varphi d\varphi = 4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

这次我们避开了被积函数的不连续性而得出了同样结果.

3) 试求下列旋转曲面的面积:

$$x = \varphi(u)\cos v,\quad y = \varphi(u)\sin v,\quad z = \psi(u)$$
$$(\alpha \leqslant u \leqslant \beta,\quad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi)$$

[**360** 段, 2)]. 按偏导数矩阵

$$\begin{pmatrix} \varphi'(u)\cos v, & \varphi'(u)\sin v, & \psi'(u) \\ -\varphi(u)\sin v, & \varphi(u)\cos v, & 0 \end{pmatrix}$$

作出这个式子:

$$\sqrt{EG-F^2} = \varphi(u)\sqrt{[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2},$$

如此所求曲面面积就由下列公式表出:

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u)\sqrt{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2}du$$

[试与 **205** 段公式 (6a) 比较].

§3. 第一型面积分

368. 第一型面积分定义 第一型面积分就是二重积分的自然推广, 正如第一型线积分与简单定积分的关系一样.

这种推广是这样建立的: 设在某一由逐段光滑界线所围的双侧光滑曲面 (S) (或逐片光滑曲面) 的点上定义了一个函数 $f(M) = f(x, y, z)$. 我们用一个任意的逐段光滑曲线网将曲面 (S) 分为 $(S_1), (S_2), \cdots, (S_n)$ 各部分. 在每一部分 $(S_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 内各任意取一点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$, 而在这点上算出函数值

$$f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$$

并且乘以相应曲面部分的面积 S_i 而做成所有这种乘积之和:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)S_i,$$

它与以前考虑过的许多和一样称为积分和.

这个和在所有部分 (S_i) 的直径趋于 0 时的有限极限就叫做函数 $f(M) = f(x, y, z)$ 沿曲面 (S) 的 **(第一型)**[①] **面积分**而表示成

$$\iint\limits_{(S)} f(M)dS = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dS, \tag{1}$$

这里 dS 象征元素面积 S_i.

369. 化为寻常二重积分 我们限于简单而光滑的曲面 (S) 的情形.

对于任何在曲面 (S) 的点上连续的函数 $f(x, y, z)$ 积分 (1) 恒存在并且成立等式

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dS = (R)\iint\limits_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}dudv. \tag{2}$$

如此, 要将第一型面积分化为寻常二重积分, 只要将诸坐标 x, y, z 换成其参变表达式, 而面积元素 dS 换成其曲线坐标式就行了.

我们来证明上面这句话.

---

①以区别于下面所要考虑的第二型面积分.

以前曾说过, 曲面 (S) 用逐段光滑曲线来分割时, 区域 (Δ) 也就有类似的分割法与之相应, 反过来也是如此. 同样, 如果 (S) 的各部分的直径趋于 0, 则 (Δ) 的各部分的直径也趋于 0, 反过来也是如此.

我们相应地将曲面 (S) 分为 $(S_1), (S_2), \cdots, (S_n)$ 各部分, 将区域 (Δ) 分为 (Δ_1), $(\Delta_2), \cdots, (\Delta_n)$ 各部分, 并且在每一部分 (S_i) 中各取一点 (x_i, y_i, z_i), 在每一部分 (Δ_i) 中各取一点 (u_i, v_i), 它们也彼此相应而有

$$x_i = x(u_i, v_i), \quad y_i = y(u_i, v_i), \quad z_i = z(u_i, v_i). \tag{3}$$

现在我们做出积分 (1) 的积分和:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) S_i.$$

按 **366** 段一般公式 (5a) 有

$$S_i = \iint\limits_{(\Delta_i)} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

应用中值定理, 得

$$S_i = [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=\overline{u}_i \\ v=\overline{v}_i}} \cdot \Delta_i,$$

这里 $(\overline{u}_i, \overline{v}_i)$ 是区域 (Δ_i) 中的一点.

由此利用 (S_i) 的表达式及 (3) 我们可将 σ 写成

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=\overline{u}_i \\ v=\overline{v}_i}} \cdot \Delta_i.$$

采取这个形状时, 它就像 (2) 式中第二积分的积分和了:

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \cdot \Delta_i.$$

σ 与 σ^* 的区别无非是, 在 σ^* 内复合函数 $f(\cdots)$ 及根式 $\sqrt{\cdots}$ 每次都是对同一个任意取来的点 (u_i, v_i) 计算的, 而在 σ 内则函数取在点 (u_i, v_i) 上, $\sqrt{\cdots}$ 取在点 $(\overline{u}_i, \overline{v}_i)$ (后者要取决于中值定理, 不是任意的) 上.

我们来看两个和之差:

$$\sigma - \sigma^* = \sum_{i} f(\cdots) \left\{ [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=\overline{u}_i \\ v=\overline{v}_i}} - [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \right\} \Delta_i.$$

设 $\varepsilon > 0$ 是一个任意小的数. 由函数 $\sqrt{EG - F^2}$ 的 (一致) 连续性在区域 (Δ_i) 的直径充分小时有

$$\left| [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=\overline{u}_i \\ v=\overline{v}_i}} - [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \right| < \varepsilon.$$

既然连续函数 f 有界:

$$|f(x,y,z)| \leqslant L,$$

则不难得出估值式

$$|\sigma - \sigma^*| < \varepsilon L \Delta,$$

所以

$$\lim(\sigma - \sigma^*) = 0.$$

由此可见, 这两个和中只要第二个和的极限存在就可推出另一和的极限也存在并和它相等. 这就证明了我们的话.

如果曲面 (S) 由显式方程

$$z = z(x,y)$$

所给出, 则公式 (2) 成为:

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS = (R)\iint\limits_{(D)} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy, \tag{4}$$

这里 (D) 表示曲面 (S) 在 xy 平面上的投影.

因为

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{1}{|\cos\nu|}$$

(ν 如惯例表示曲面法线与 z 轴的角), 故公式 (4) 可写成

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS = (R)\iint\limits_{(D)} f(x,y,z(x,y))\frac{dxdy}{|\cos\nu|}. \tag{5}$$

我们至今一直假设积分所展布的曲面 (S) 是简单而光滑的. 我们的结果不难搬到由有限多这种片段所组成的曲面的一般情形.

370. 第一型面积分在力学上的应用 1°. 用这种积分可以计算每点上有一定密度分布的物质曲面的质量、矩、质心坐标以及其他的量.

事实上, 与以前所讲平面质量分布的情形比较起来, 这里并没有什么新鲜之处.

2°. *单层引力* 第一型面积分可以很自然地用来研究分布在曲面上的质量的引力.

设沿曲面 (S) 连续分布着质量, 在曲面的每点 $M(x,y,z)$ 处都有给定的密度 $\rho(M) = \rho(x,y,z)$①. 更设在曲面外点 $A(\xi,\eta,\zeta)$ 处有一单位质量. 现在要来决定点 A 被曲面 (S) 吸引的力 $\overrightarrow{F}$ 的大小和方向. 这里所根据的是牛顿引力定律 (万有引力定律).

如果点 A 被单个质点 $M(x,y,z)$ 所吸引, 集中于该点的质量为 m, 则引力的大小将等于

$$F = \frac{m}{r^2}②,$$

①在这情形下我们用 "单层" 这个术语以与现在不考虑的 "双层" 情形区别开来.

②为写起来简单一点, 我们如惯例令 "引力常数" (即牛顿公式中取决于单位选择法的比例乘数) 等于 1.

这里 r 是距离 $\overline{AM}$, 即

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}. \tag{6}$$

因为这个力的方向是由 A 指向 M 的, 所以其方向余弦为

$$\frac{x-\xi}{r},\quad \frac{y-\eta}{r},\quad \frac{z-\zeta}{r},$$

因此引力 $\overrightarrow{F}$ 在各坐标轴上的投影可表示为

$$F_x=m\frac{x-\xi}{r^3},\quad F_y=m\frac{y-\eta}{r^3},\quad F_z=m\frac{z-\zeta}{r^3}. \tag{7}$$

如果吸引的质点不止一个而成一质点系, 则这些式子就要换成这类式子之和; 最后, 在质量沿曲面连续分布的情形则那些和变成了积分.

用寻常的讲法: 考虑曲面元素 dS, 它带有质量 ρdS, 设想这一质量集中于 dS 的一个点 $M(x,y,z)$ 上. 它对点 A 的引力在各轴上的投影将是 [参看 (7)]

$$dF_x=\rho\frac{x-\xi}{r^3}dS,\quad dF_y=\rho\frac{y-\eta}{r^3}dS,\quad dF_z=\rho\frac{z-\zeta}{r^3}dS,$$

这里 r 表示距离 $\overline{AM}$, 可由公式 (6) 表出. 现在只要积分起来就可得出*单层引力* $\overrightarrow{F}$ 在各轴上的投影的公式如下:

$$F_x=\iint\limits_{(S)}\rho\frac{x-\xi}{r^3}dS,\quad F_y=\iint\limits_{(S)}\rho\frac{y-\eta}{r^3}dS,\quad F_z=\iint\limits_{(S)}\rho\frac{z-\zeta}{r^3}dS. \tag{8}$$

如此力 $\overrightarrow{F}$ 的大小方向都完全确定了.

如果被吸引的点 A 本身落在曲面 (S) 上, 则引力在各轴上的投影仍然可由积分 (8) 表出, 但这回那些积分不是正常积分, 因为在点 A 邻近被积函数都不是有界的了.

3°. *单层位势* 在只有一个吸引点 $M(x,y,z)$ 的情形下我们已经知道引力在各坐标轴上的投影具有表达式 (7). 不难看出, 这三个投影是函数

$$W(\xi,\eta,\zeta)=\frac{m}{r}$$

对 ξ,η,ζ 的偏导数, 这个函数叫做点 M 的场对点 A 的*牛顿位势* [参看 **351** 段, 1)].

如果质点系造成一个场, 则位势可表示为这种分式之和, 而位势对 ξ,η,ζ 的导数仍给出引力在各轴上的投影.

由此我们自然得出以密度 ρ 沿曲面 (S) 分布的*单层对点 A 的位势*的表达式

$$W(\xi,\eta,\zeta)=\iint\limits_{(S)}\rho\frac{dS}{r}. \tag{9}$$

只剩下这样的问题: 对这位势来说下列基本性质

$$\frac{\partial W}{\partial\xi}=F_x,\quad \frac{\partial W}{\partial\eta}=F_y,\quad \frac{\partial W}{\partial\zeta}=F_z \tag{10}$$

是否仍保持不变. 这里 F_x,F_y,F_z 是单层引力 $\overrightarrow{F}$ 在各轴上的投影而可由公式 (8) 来决定.

如果点 A 不落在曲面上, 如此连续性完全保持, 则不难证明对积分 (9) 在依 ξ,η,ζ 进行微分时适用莱布尼茨法则 (对此只要重复我们熟悉的论证). 如此, 对所考虑的质量分布情形关系式 (10) 也得到证实.

例 1) 试求一均匀球层 ($\rho=$ 常数) 对一个点的引力.

解 设球的中心在坐标原点, 而被吸引点 A (质量为 1) 位于正 z 轴上离中心 a 处. 引力在 x 轴及 y 轴上的投影 F_x 与 F_y 显然都等于 0. 其次, 我们有

$$F_z=\iint\limits_{(S)}\rho\frac{z-a}{r^3}dS$$

(r 是点 A 与球面任意点 M 间的距离). 如变换为球面坐标

$$x=R\sin\varphi\cos\theta,\quad y=R\sin\varphi\sin\theta,\quad z=R\cos\varphi,$$

则有

$$dS=R^2\sin\varphi d\varphi d\theta,\quad r=\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\varphi}$$

而

$$F_z=2\pi R^2\rho\int_0^\pi\frac{(R\cos\varphi-a)\sin\varphi d\varphi}{(R^2+a^2-2Ra\cos\varphi)^{3/2}}.$$

用替换 $R^2+a^2-2Ra\cos\varphi=t^2$ 可将此式变为

$$F_z=\frac{\pi R}{a^2}\rho\int_{|R-a|}^{R+a}\left(\frac{R^2-a^2}{t^2}-1\right)dt=-\frac{\pi R}{a^2}\rho\left(2R-\frac{R^2-a^2}{|R-a|}-|R-a|\right).$$

现在我们来讨论两种情形.

(1) 设 $a<R$; 在这情形 $|R-a|=R-a$, 而括号中的值为 0, 于是

$$F_z=0,$$

所以, 落在均匀球层内部的点受不到球层引力的影响.

(2) 如果 $a>R$, 则 $|R-a|=-(R-a)$, 如此

$$F_z=-\frac{4\pi R^2\rho}{a^2}.$$

所以, 落在均匀球层外部的点所受球层的引力就如同球层全部质量 $m=4\pi R^2\rho=S\rho$ 都集中于球心的情形一样.

2) 求均匀球层对任意一点的位势.

解 仍用前面的记号, 我们有

$$W(a)=\iint\limits_{(S)}\rho\frac{dS}{r}=2\pi R^2\rho\int_0^\pi\frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\varphi}}$$
$$=\frac{2\pi R}{a}\rho\int_{|R-a|}^{R+a}dt=\frac{2\pi R}{a}\rho(R+a-|R-a|).$$

如果 $a<R$, 则

$$W(a)=4\pi R\rho,$$

如此在均匀球层内部其位势为常数.

反之, $a>R$ 时

$$W(a)=\frac{4\pi R^2\rho}{a},$$

即均匀球层在外部空间的位势就如同其全部质量都集中于球心的情形一样.

附注 在 $a = R$ 时两个问题都牵涉到反常面积分, 因此时被积函数变成无穷大.

§4. 第二型面积分

371. 第二型面积分定义 这种新积分可仿照第二型线积分的方式来构成.

那里我们是由有向 (定向) 曲线出发的, 并且把它分为一些元素, 然后把每一具有相应方向的元素投影到坐标轴上. 所得投影也是有方向的, 而我们看它的方向与坐标轴一致与否来决定取其长时给以正号或负号.

仿此我们现在来考虑一个光滑的或逐片光滑的双侧曲面 (S) 并取定其两侧中的任何一侧; 我们已经知道 [**362** 段], 这就等价于在曲面上选取一个确定的定向.

为确定起见我们先假设曲面是由显式方程

$$z = z(x, y)$$

所给出, 而点 (x, y) 在 xy 平面上一个由逐段光滑界线所围的区域 (D) 内变化. 于是我们可以在曲面的上侧与下侧之间选择其一[①]. 在第一种情形, 曲面上的曲线要标以从上面看来反时针的方向, 在第二种情形则标以与此相反的方向.

如果将曲面分成许多元素而将每一相应地定向的元素射影到 xy 平面上, 则该元素的界线的环行方向就决定了射影的界线的环行方向. 这个方向在固定的是曲面 (S) 的上侧时将与反时针旋转一致, 即相应于 xy 平面本身的定向; 在这情形射影的面积我们将取正号. 在下侧的情形则旋转方向相反, 而射影面积取负号 [参看 **357** 段].

现在设在所给曲面 (S) 的点上定义了一个函数 $f(M) = f(x, y, z)$. 用逐段光滑曲线网将曲面分成许多元素

$$(S_1), (S_2), \cdots, (S_n),$$

而在每一元素 (S_i) 内各取一点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$. 然后算出函数值 $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ 并乘以元素 (S_i) 在 xy 平面上的射影的面积 D_i, D_i 的正负号按上述法则给出. 最后做出其总和 (也是一种积分和)

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) D_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) D_i. \tag{1}$$

此和在所有小区域 (S_i) 的直径趋于 0 时的有限极限就叫做

$$f(M)dxdy = f(x, y, z)dxdy$$

的展布在曲面 (S) 所选定一侧上的 **(第二型) 面积分**并用记号

$$I = \iint\limits_{(S)} f(M)dxdy = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dxdy \tag{2}$$

---

①参看 **361** 段第一个脚注.

来表出 (这里 $dxdy$ 象征曲面元素在 xy 平面上的射影的面积).

但由这记号看不出所指的究竟是曲面的哪一侧, 因此每次均须特别指出. 由定义本身可知, 曲面由所考虑的一侧换成相反的一侧时, 积分要跟着变号.

如果曲面不是上述那种特别形式, 则我们总预先假设它由有限多个逐段光滑界线所围成这样的片段所组成, 后者或者具有这种形式, 或者是母线平行于 z 轴的柱面的一部分 (其在 xy 平面上的准线有零面积). 在元素落在第一型片段上的情形我们已经知道怎样给其射影面积加上正负号; 如果曲面的元素有些在上面而有些在下面时则可随元素而取不同的正负号 (图 56). 至于落在所说柱面上的元素, 则其射影集中于一条线而有零面积, 故谈不到所谓正负号①. 在其他方面对这一般情形的面积分定义可和上面一样地来建立.

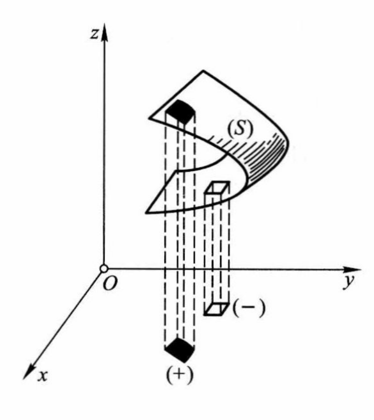


图 56

改变坐标轴的地位 (相应地也要改变对曲面的条件) 则替代 xy 平面也可把曲面的元素射影到 yz 或 zx 平面上. 如此可得出其他两个第二型面积分

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dydz \quad 或 \quad \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dzdx. \tag{2*}$$

在应用中常会遇到将所有这几个形式的积分合并在一起:

$$\iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

这里 P, Q, R 是 (x,y,z) 的函数, 定义在曲面 (S) 的点上. 再提醒一次, *在所有的情形曲面 (S) 总假设是双侧的, 而积分是展布在其某一侧上的*.

372. 化为寻常二重积分 我们假设函数 f 在曲面 (S) 各点上都是连续的.

$1°$. 首先来考虑曲面 (S) 由显式方程

$$z = z(x,y) \quad ((x,y) \text{ 属于 } (D))$$

给出的这一基本情形, 这里函数 z 连同其偏导数

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

都是连续的.

①我们回避了属于曲面不同片段的 “不规则” 元素 (可以直截了当忽略掉).

如果积分 (2) 沿曲面上侧来取, 则在积分和 (1) 中所有 D_i 都是正的. 在这和中将 z_i 换成其值 $z(x_i, y_i)$ 而将它化为:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))D_i,$$

这不难认出就是寻常二重积分

$$(R)\iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))dxdy$$

的积分和.

取极限我们就确定了积分 (2) 的存在同时建立了等式

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dxdy = (R)\iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))dxdy. \tag{3}$$

如果积分展布在曲面 (S) 的下侧, 则显然有

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dxdy = -(R)\iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))dxdy. \tag{3a}$$

现在不难 (对所考虑情形) 来建立两型面积分间的关系. 首先就曲面上侧来说 (对第二型积分). 如果在 **369** 段公式 (5) 中把 ν 看作锐角, 而将函数 $f(x, y, z)$ 换成以 $f(x, y, z)\cos\nu$, 则有

$$(R)\iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))dxdy = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\cos\nu dS.$$

由此按 (3) 得出所求公式:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dxdy = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\cos\nu dS. \tag{4}$$

将曲面上侧换作下侧, 则等式 (4) 左边要因此改变正负号. 如果这次将 ν 理解为向下的法线与 z 轴所成的钝角, 则余弦连同积分也变号, 如此该等式仍保持成立.

2°. 如果 (S) 是母线平行于 z 轴的柱面的一部分, 则其元素全都有零射影, 如此在这情形

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dxdy = 0. \tag{5}$$

显然在此公式 (4) 仍成立: 因为 $\cos\nu = 0$, 故此公式右边也变成 0.

3°. 最后, 如果曲面 (S) 由有限多个 1° 或 2° 中所考虑的片段所组成, 则将关于各片段的 (4) 型公式加起来就可证明公式 (4) 在一般情形也成立.

4°. 类似的公式也可对面积分 (2*) 得出. 将分别对任意连续函数 P, Q, R 写下的三个公式全加在一起就得出表示两型面积分间关系的一般公式:

$$\iint_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{(S)} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)dS. \tag{6}$$

要注意的是, 这里右边的方向余弦是依照左边积分所展布的曲面那一侧的法线来计算的.

5°. 如果曲面 (S) 是以参变式给出的, 则可将公式 (6) 右边的积分 —— 连带地, 左边的积分 —— 化为寻常二重积分, 展布在参变量的变域 (Δ) 上. 我们先假设曲面是简单而光滑的, 又设它由逐段光滑界线所围成.

我们选定曲面一侧并由此在它上面定了向. 如果区域 (Δ) 的界线 (Λ) 的正向环行相应于界线 (L) 的正向环行, 则我们知道 [**362** 段], 表示曲面所选之侧的法线的方向余弦可由公式

$$\cos\lambda = \frac{A}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\mu = \frac{B}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\nu = \frac{C}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

来决定, 根式前取正号. 另一方面, 在变换为依参变量 u, v 的二重积分时面积元素 dS 应换成

$$+\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv$$

[**369** 段]. 最后得出

$$\iint_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{(\Delta)} (AP + BQ + CR)dudv. \tag{7}$$

右边函数 P, Q, R 中的 x, y, z 要其用 u 和 v 的表达式来代替.

附注 这个公式也可推广到由简单光滑曲面彼此衔接起来的曲面的较一般情形. 但在右边积分前可出现正号也可出现负号 [参看 **361** 段附注].

373. 斯托克斯公式 现在我们来推导一个联系面积分与线积分的公式, 它就是已知的格林公式 [**346** 段] 的推广.

关于曲面 (S) 我们先保持和前段 5° 中同样的假设.

设在包含曲面 S 本身于其内部的某一空间区域内给定了一个函数 $P(x, y, z)$, 它连同其偏导函数都在该区域内连续. 于是成立公式

$$\int_{(L)} Pdx = \iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy, \tag{8}$$

而界线 (L) 的环行方向就相应于曲面 (S) 的右边那积分所展布之侧.

首先我们将沿曲线 (L) 的线积分变成沿曲线 (Λ) 的积分:

$$\int_{(L)} Pdx = \int_{(\Lambda)} P\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right). \tag{9}$$

这等式不难验证: 采用曲线 (Λ) 的参变表示法:

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

由此曲线 (L) 也表示成参变式:

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad z = z(u(t), v(t)).$$

于是两个积分化成了同一个依参变量 t 的寻常积分:

$$\int_\alpha^\beta P \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}\right) dt.$$

现在应用格林公式于 (9) 式右边的积分:

$$\int_{(\Lambda)} P \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) = \iint\limits_{(\Delta)} \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(P \frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P \frac{\partial x}{\partial u}\right)\right\} dudv.$$

因为最后这个被积式展开来成

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \\
&-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\
=& \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right),
\end{aligned}$$

所以我们得出二重积分

$$\iint\limits_{(\Delta)} \left\{\frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C\right\} dudv.$$

按公式 (7) 它不难变成面积分

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy,$$

恰好沿曲面所选定之侧来积. 如此完成了等式 (8)[①] 的证明.

这公式我们是对简单光滑曲面建立的. 但它不难推广到由逐段光滑曲线所围的*逐片光滑曲面*的一般情形. 只要对每一简单光滑片段分别写出公式, 然后将所得诸等式逐项加起来就行了.

---

①须指出我们在推导中利用了导函数 $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$ 的存在性和连续性, 而这些导函数并不出现在结果里. 其实该公式没有这些假设也仍成立.

转换字母 x, y, z 的方法还可得出两个类似等式:

$$\int_{(L)} Qdy = \iint_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z} dydz,$$
$$\int_{(L)} Rdz = \iint_{(S)} \frac{\partial R}{\partial y} dydz - \frac{\partial R}{\partial x} dzdx, \tag{8a}$$

这里 Q 与 R 是 x, y, z 的两个新函数, 满足与 P 一样的条件.

将三个等式 (8) 与 (8a) 全加起来, 就得出所求结果的最一般形式:

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz$$
$$= \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx. \tag{10}$$

这个等式就叫做斯托克斯公式. 再提醒一次, 曲面之侧与界线环行方向按 **362** 段中所建立法则相互决定.

如果取 xy 平面上的平面区域 (D) 作为曲面 (S) 的一片, 从而 $z = 0$, 则得出公式

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

这就是读者已知道的格林公式; 如此, 格林公式就是斯托克斯公式的一个特例①.

最后我们指出, 斯托克斯积分中的第二型面积分可以用第一型面积分来替代. 于是这公式成为

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz$$
$$= \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\lambda + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\mu + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\nu\right] dS, \tag{11}$$

这里 $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ 表示相应于曲面所选定之侧的法线的方向余弦.

我们举一个例来 "验证" 斯托克斯公式. 令

$$P = y^2 + z^2, \quad Q = z^2 + x^2, \quad R = x^2 + y^2$$

并取柱面

$$x^2 + y^2 = 2rx \quad \text{由球面} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx \quad (R > r, z > 0)$$

所切出的曲面部分作为 (S).

---

① 为了便于记住斯托克斯公式, 我们指出: 右边积分中第一项与格林公式相同, 其余两项可由字母 x, y, z 及 P, Q, R 循环轮换得到.

采用曲线的参变表示法①:

$$x = r(1+\cos t), \quad y = r\sin t, \quad z = \sqrt{2r(R-r)}\sqrt{1+\cos t} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

这样曲线积分化成了一个很复杂的寻常积分:

$$\int_0^{2\pi} \Big\{ [r^2\sin^2 t + 2r(R-r)(1+\cos t)](-r\sin t)$$
$$+[2r(R-r)(1+\cos t) + r^2(1+\cos t)^2] r\cos t$$
$$+[r^2(1+\cos t)^2 + r^2\sin^2 t]\cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2r(R-r)}{1+\cos t}}(-\sin t)\Big\} dt.$$

但大括号中第一项与第三项乘以 dt 后有 $f(\cos t)d\cos t$ 的形状, 而其积分由于余弦的周期性而等于 0. 做出剩下的计算, 得出 $2\pi Rr^2$.

我们先把展布在所说曲面上侧的第二型面积分

$$2\iint\limits_{(S)} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$$

变为下列第一型积分:

$$2\iint\limits_{(S)} [(y-z)\cos\lambda + (z-x)\cos\mu + (x-y)\cos\nu] dS.$$

因为

$$\cos\lambda = \frac{x-R}{R}, \quad \cos\mu = \frac{y}{R}, \quad \cos\nu = \frac{z}{R}.$$

以这三式代入后所求的积分经化简后成为

$$2\iint\limits_{(S)} (z-y)dS.$$

由于曲面对 xz 平面的对称性, 积分 $\iint\limits_{(S)} ydS$ 等于 0, 剩下的积分我们又把它变成第二型积分:

$$2\iint\limits_{(S)} zdS = 2\iint\limits_{(S)} \frac{z}{\cos\nu}dxdy = 2R\iint\limits_{(S)} dxdy = 2\pi Rr^2.$$

374. 斯托克斯积分应用于空间线积分的研究 设在开区域 (T) 内给了三个函数 P, Q, R, 它们连同其导函数

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y}$$

都是连续的.

① 如果令 $x - r = r\cos t, y = r\sin t$, 则参变量 t 的几何意义是明显的; 将这二式代入球面方程中即得出 z 与 t 的关系. 由上面看来, t 由 0 变到 2π 时曲线以反时针方向描出.

借助斯托克斯公式不难建立使沿 (T) 内任何简单闭界线 (L) 的积分

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz \tag{12}$$

化为 0 的必要而充分的条件.

但是, 为了能使用斯托克斯公式, 须预先对我们所考虑的区域 (T) 加一个自然的限制, 即要: 区域 (T) 内任何简单逐段光滑闭曲线 (L) 必能 "张" 成一片 (不自相交叉的) 以 (L) 为其界线并且也完全落在 (T) 内的光滑曲面 (S). 这个性质就像平面区域的单连通性; 具有这种性质的空间区域 (T) 也叫做 ("依曲面的"[①]) 单连通区域. 例如, 两个同心球面所包围的体在这意义上是单连通的, 而环面则不是.

设区域 (T) 是 (依曲面) 单连通的. 如上述, 在界线 (L) 上张一曲面 (S) 而按斯托克斯公式将线积分 (12) 换成面积分

$$\iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx.$$

显然为了使它等于 0, 一组充分条件是:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \tag{B}$$

这些条件同时也是必要的; 这不难证明 (证法与 **348** 段相似) —— 只要依次考虑平行于各坐标面的平面上的平面图形 (S) 就行了.

读者可以看出, 我们在此利用斯托克斯公式的目的是与 **348** 段利用格林公式相似的.

不难证明, 同一条件 (B) 也是使积分

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz \tag{13}$$

与联结区域 (T) 内任何两点 A 与 B 的曲线 (AB) 的形状无关的必要而充分的条件, 当然, 在此要假设该区域是依曲面单连通的.

必要性可以像平面的情形 [**349** 段] 一样来建立. 至于充分性, 则当两曲线 $(A\mathrm{I}B)$ 与 $(A\mathrm{II}B)$ 除两端外没有交叉点时也和那里一样不难解决. 如果不是如此, 即所取的两曲线相交, 则这里问题比在平面情形要简单些: 在连通空间区域 (T) 内, 总可以取这样的第三条曲线 $(A\mathrm{III}B)$, 它与前两条都不相交[②]. 于是

$$\int_{(A\mathrm{I}B)} = \int_{(A\mathrm{III}B)}, \quad \int_{(A\mathrm{II}B)} = \int_{(A\mathrm{III}B)},$$

[①] 以与下面 [**381** 段] 要讲的空间区域单连通性区别开来.

[②] 图 57 表明, 这在平面情形不是永远做得到的.

由此推知, 恒有

$$\int_{(AIB)} = \int_{(AIIB)}.$$

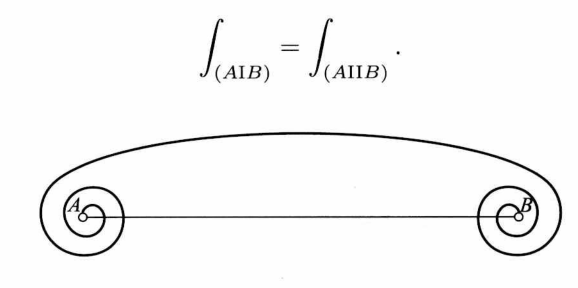


图 57

以上的讨论还可以联系到这样一个问题: 微分式

$$Pdx + Qdy + Rdz \tag{14}$$

是否是某三元函数的全微分? 可以像 **350** 段一样验证, 条件 (B) 就是这情形的必要条件. 要证明其为充分条件, 则也和平面的情形一样, 只要直接做出其原函数来就行了 —— 写成一个线积分

$$F(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz$$

的形状 [参看 **350** 段, (8)], 它在条件 (B) 实现时就与道路无关. 如此, 对上述那种区域 (T), 条件 (B) 就是使 (14) 式成全微分的必要而充分的条件.

第二十三章　三重积分

§1. 三重积分及其计算

375. 立体质量计算问题　设给了一个充满质量的立体 (V), 并且在每点 $M(x,y,z)$ 上已知质量的分布密度

$$\rho=\rho(M)=\rho(x,y,z),$$

要决定该立体的全质量 m.

要解决这个问题我们将立体 (V) 分为

$$(V_1),\quad (V_2),\quad \cdots,\quad (V_n)$$

等部分并在每部分中各选取一点

$$M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i).$$

近似地认为在每部分 (V_i) 内密度是常数, 并且就等于所选一点上的密度 $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$. 于是这部分的质量 m_i 可近似表示为

$$m_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)V_i,$$

而立体全质量可表示为

$$m\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)V_i.$$

如果各部分的直径都趋于 0, 则在极限情形这近似式变成精确的, 如此

$$m=\lim\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)V_i, \tag{1}$$

而问题就解决了.

我们看到, 这问题的解决在此也是归结为一种特殊的和的极限 —— 它是本书中屡次论及的积分和的另一类型.

这类极限在力学和物理学里常会看到, 它们称为三重积分. 上面所得结果用通常记号可写成这样:

$$m = \iiint\limits_{(V)} \rho(x, y, z) dV. \tag{2}$$

本章所论以三重积分理论及其重要应用为主. 因为许多对二重积分建立的命题连同其证明都可以搬到三重积分的情形, 我们一般将只陈述这些命题, 而让读者自己去重述以前的证明.

376. 三重积分及其存在条件 在给三重积分这新的积分概念下一般定义时, 立体体积概念起了重要的作用, 正和平面图形面积概念在二重积分定义中所处的地位一样.

对于体积概念我们在第一卷里已经熟悉, 并且已屡次接触到它. 一个立体的体积存在的条件无非是要包围它的曲面有零面积 [**197** 段]. 只有这样的曲面是我们所要考虑的, 所以在一切我们所需要的情形, 体积的存在也就得到保证. 特别是, 光滑曲面及逐片光滑曲面正属于这一类曲面.

现在设在某一空间区域 (V) 内给定了一个函数 $f(x, y, z)$. 将此区域用一个曲面网分成 $(V_1), (V_2), \cdots, (V_n)$ 等部分, 分别有体积 $V_1, V_2, \cdots, V_n$. 在第 i 个元素 (V_i) 内任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i), 将此点上的函数值 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 乘以体积 V_i 而组成积分和

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i.$$

此和当所有区域 (V_i) 的直径连最大的一个都趋于 0 时的有限极限 I 就称为函数 $f(x, y, z)$ 在区域 (V) 内的**三重积分**. 用记号表示为

$$I = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz.$$

这类有限极限只有当函数有界时才存在; 对这种函数除积分和 σ 外还可引入达布和:

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n} M_i V_i,$$

这里

$$m_i = \inf_{(V_i)}\{f\}, \quad M_i = \sup_{(V_i)}\{f\}.$$

按寻常方法可证明, 这积分存在的必要而充分的条件是

$$\lim (S - s) = 0$$

或

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \omega_i V_i = 0,$$

这里 $\omega_i = M_i - m_i$ 是函数 f 在区域 (V_i) 内的摆幅. (在积分存在时两和 s, S 也有其极限.)

由此立即推知, 任何连续函数都是可积分的.

可积分函数的条件还可稍加推广如下: 任何有界函数, 只要其全部不连续点落在有限多个零体积曲面上, 就是可积分的 [参看 **339** 及 **340** 段].

377. 可积分函数及三重积分的性质 只要列举出这些性质就行了, 其证明与 **341** 段所讲的相似.

1°. 三重积分的存在及其值均与被积函数沿有限多零体积曲面上所取值无关.

2°. 如果 $(V) = (V') + (V'')$, 则

$$\iiint\limits_{(V)} f dV = \iiint\limits_{(V')} f dV + \iiint\limits_{(V'')} f dV,$$

并且只要等式一边的积分存在则可推得另一边的积分也就存在, 反过来也是如此.

3°. 如果 k 为常数, 则

$$\iiint\limits_{(V)} k f dV = k \iiint\limits_{(V)} f dV,$$

并且只要右边的积分存在, 左边的积分也就存在.

4°. 如果在区域 (V) 内两函数 f 与 g 可积分, 则函数 $f \pm g$ 也可积分, 并且

$$\iiint\limits_{(V)} (f \pm g) dV = \iiint\limits_{(V)} f dV \pm \iiint\limits_{(V)} g dV.$$

5°. 如果函数 f 与 g 在区域 (V) 内可积分并且 $f \leqslant g$, 则

$$\iiint\limits_{(V)} f dV \leqslant \iiint\limits_{(V)} g dV.$$

6°. 如果函数 f 可积分, 则 $|f|$ 也就可积分, 并且

$$\left| \iiint\limits_{(V)} f dV \right| \leqslant \iiint\limits_{(V)} |f| dV.$$

7°. 如果函数 f 在 (V) 内可积分并且

$$m \leqslant f \leqslant M,$$

则

$$mV \leqslant \iiint\limits_{(V)} f dV \leqslant MV.$$

换句话说, 我们有这中值定理:

$$\iiint\limits_{(V)} f dV = \mu V \quad (m \leqslant \mu \leqslant M).$$

当函数 f 连续时这个公式可以写成

$$\iiint\limits_{(V)} f dV = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})V, \tag{3}$$

这里 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 是区域 (V) 内某一点.

其次也不难将 **342** 段的内容推广到三维的情形: 也和那里一样, 可以建立 (三维) 区域函数概念, 特别是, 可加函数概念. 这种函数的重要例子 (参看 2°) 是依变动区域 (v) 的积分:

$$\Phi((v)) = \iiint\limits_{(v)} f dv. \tag{4}$$

和以前一样, 可引入函数 $\Phi((v))$ 在一点 M 上对区域的导数概念; 这就是指包含它的区域 (v) 缩为一点时的极限

$$\lim_{(v)\to M} \frac{\Phi((v))}{v}.$$

8°. 如果被积函数连续, 则积分 (4) 在点 $M(x, y, z)$ 上对区域的导数将恰恰是被积函数在这一点上的值, 即 $f(M) = f(x, y, z)$.

如此, 在所作假设之下积分 (4) 在某种意义上就是函数 f 的 “原函数”.

378. 三重积分的计算 这里问题也是要化为由重数较低的积分所组成的累次积分. 假设函数 $f(x, y, z)$ 在所考虑区域内连续, 由此保证了所有以下接触到的积分都存在, 我们首先来讲这个情形: 函数 $f(x, y, z)$ 的积分所展布的立体是一个长方体

$$(T) = [a, b; c, d; e, f],$$

它在 yz 平面上的射影是矩形

$$(R) = [c, d; e, f].$$

于是我们首先有

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z) dT = \int_a^b dx \iint\limits_{(R)} f(x, y, z) dR. \tag{5}$$

然后将其中二重积分再换成累次积分, 如此三重积分的计算终于化成了三个单积分的递次计算:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dT = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x,y,z)dz. \tag{6}$$

反之, 如果把前两个积分合并为二重积分, 则得

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dT = \iint\limits_{(Q)} dxdy \int_e^f f(x,y,z)dz, \tag{7}$$

这里 $Q=[a,b;c,d]$. 当然在所有这些情形, 变量 x,y,z 的地位是可以调换的.

现在假设, 三重积分展布在非长方体的立体 (V) 上. 设这个立体被夹在两个平面 $x=x_0$ 与 $x=X$ 之间, 而每个与它们平行的平面 —— 各相应于一个固定值 x $(x_0 \leqslant x \leqslant X)$ —— 所截的图形都是有面积的; 以 (P_x) 表示该图形在 yz 平面上的射影 (图 58). 于是

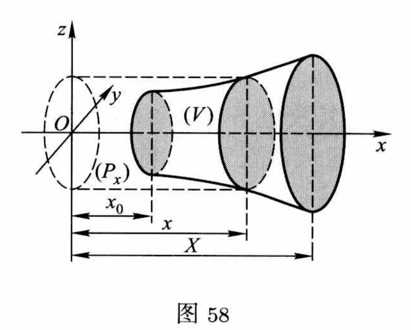


图 58

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \int_{x_0}^X dx \iint\limits_{(P_x)} f(x,y,z)dydz. \tag{5a}$$

这与公式 (5) 相似.

其次, 设立体 (V) 是一个 "柱体", 下面和上面各由曲面

$$z=z_0(x,y) \quad 和 \quad z=Z(x,y)$$

所包围, 在 xy 平面上投射成一图形 D, D 的边界为零面积曲线 (K); 立体 (V) 的侧面是一柱面, 此柱面以曲线 (K) 为准线而母线平行于 z 轴 (图 59).

于是, 仿照公式 (7) 我们有

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \iint\limits_{(D)} dxdy \int_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{7a}$$

如果区域 (D) 是一个曲线梯形, 以曲线

$$y=y_0(x) \quad 和 \quad y=Y(x) \quad (x_0 \leqslant x \leqslant X)$$

为腰而以直线 $x=x_0$, $x=X$ 为底 (图 60), 则立体 (V) 可归入上面所讨论过的两种类型. 将二重积分 (在公式 (5a) 中或 (7a) 中) 换成累次积分, 得

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \int_{x_0}^X dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} dy \int_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{6a}$$

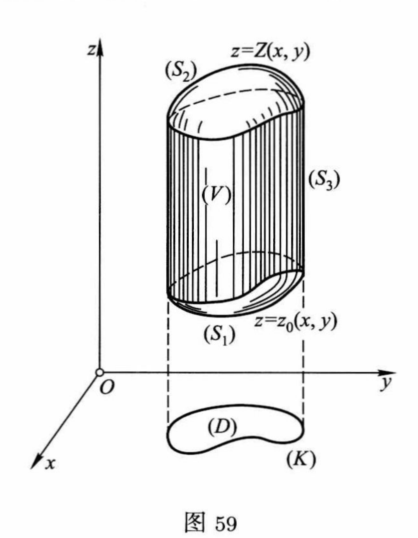


图 59

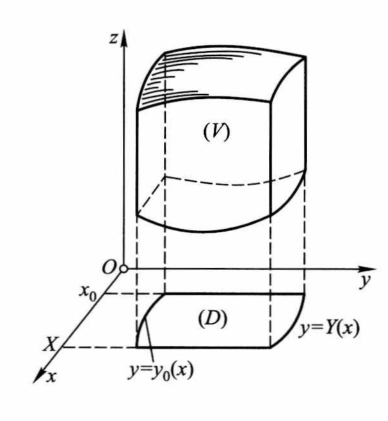


图 60

这公式推广了公式 (6).

也和上面讨论过的那简单情形一样, 这里如将变量 x, y, z 互相调换还可得出与上列公式相似的公式.

例 1) 计算积分

$$I = \iiint \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3},$$

它展布在以平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 及 $x+y+z=1$ 为界的四面体上 (图 61).

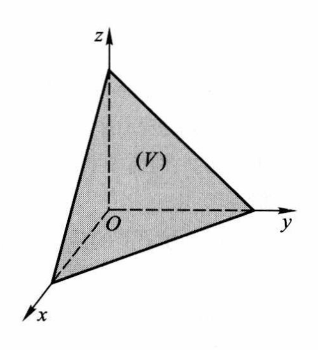


图 61

解 四面体在 xy 平面上的射影是一个由直线 $x=0$, $y=0$ 及 $x+y=1$ 所成的三角形. 显然, x 的变化是 0 与 1, 而在 x 固定于这界限内时, 变量 y 可由 0 变至 $1-x$. 如果 x 与 y 都固定, 则点可以沿垂直方向由平面 $z=0$ 移动至平面 $x+y+z=1$; 如此变量 z 的界限是 0 和 $1-x-y$.

按公式 (6a) 我们有

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

逐一计算积分, 由最内层算起:

$$\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right],$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right]dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4}\right),$$

最后,

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right).$$

2) 计算狄利克雷积分

$$D = \iiint\limits_{\substack{x,y,z\geqslant 0\\ x+y+z\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}dxdydz,$$

这里假设 $p,\ q,\ r \geqslant 1$ (图 61).

如果利用像 (5a) 那样的公式而将对 z 的积分换成对 x 的积分, 则得:

$$D = \int_0^1 z^{r-1}dz \iint\limits_{\substack{x,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1-z}} x^{p-1}y^{q-1}dxdy.$$

用变量替换 $x = (1-z)\xi,\ y = (1-z)\eta$, 将二重积分化为已知的 [**344** 段, 3)]

$$(1-z)^{p+q} \iint\limits_{\substack{\xi,\eta\geqslant 0\\ \xi+\eta\leqslant 1}} \xi^{p-1}\eta^{q-1}d\xi d\eta = (1-z)^{p+q}\cdot\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)},$$

如此

$$D = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\int_0^1 z^{r-1}(1-z)^{p+q}dz.$$

最后, 利用已知的 B 函数的 Γ 表达式 [**311** 段, (12)], 终于得出

$$D = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r+1)}.$$

这个结果完全与 **344** 段, 3) 中所得的相似. 其实它在更一般的假设 $p>0, q>0, r>0$ 下也仍成立: 但在被积函数变成无穷大时 (例如, 在 $0<p<1$ 时这发生在平面 $x=0$ 上) 该积分已经是 "反常的" 而需要再取一次极限. 这种积分可以像二重积分的情形一样来下定义 [参看 **344** 段, 4), 附注].

379. 力学上的应用 自然, 所有有关空间立体 (V) 中质量分布的几何量及力学量原则上都可表示为展布在立体 (V) 上的三重积分. 这里也是利用无穷小元素求和原理较为简便 [参看 **204—208** 及 **345** 各段].

我们以 ρ 表示在立体 (V) 任意一点上的质量分布密度; 它是点的坐标的函数; 这个函数我们恒假设是连续的. 将质量元素 $dm = \rho dV = \rho dxdydz$ 加起来, 总质量为

$$m = \iiint\limits_{(V)} \rho dV = \iiint\limits_{(V)} \rho dxdydz \tag{8}$$

[参看 **375** 段].

由静矩元素

$$dK_{yz} = xdm = x\rho dV,\quad dK_{zx} = ydm = y\rho dV,\quad dK_{xy} = zdm = z\rho dV$$

出发我们找到静矩本身:

$$K_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x\rho dV,\quad K_{zx} = \iiint\limits_{(V)} y\rho dV,\quad K_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z\rho dV, \tag{9}$$

而由此也就求出质心坐标:

$$\xi = \frac{\iiint\limits_{(V)} x\rho dV}{m}, \quad \eta = \frac{\iiint\limits_{(V)} y\rho dV}{m}, \quad \zeta = \frac{\iiint\limits_{(V)} z\rho dV}{m}. \tag{10}$$

在均匀体的情形 $\rho =$ 常数, 则得更简单的式子:

$$\xi = \frac{\iiint\limits_{(V)} x dV}{V}, \quad \eta = \frac{\iiint\limits_{(V)} y dV}{V}, \quad \zeta = \frac{\iiint\limits_{(V)} z dV}{V}.$$

显然对坐标轴的惯性矩公式是:

$$\begin{gathered} I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\rho dV, \quad I_y = \iiint\limits_{(V)} (z^2 + x^2)\rho dV, \\ I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\rho dV, \end{gathered} \tag{11}$$

而对坐标面的惯性矩公式则是:

$$I_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x^2 \rho dV, \quad I_{zx} = \iiint\limits_{(V)} y^2 \rho dV, \quad I_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z^2 \rho dV. \tag{12}$$

最后, 设充满立体 (V) 的质量按牛顿定律吸引一个质点 $A(\xi, \eta, \zeta)$ (质量为 1) (图 62). 由质量元素 $dm = \rho dV$ 产生的吸引力在坐标轴上的射影① 为

$$dF_x = \frac{x - \xi}{r^3}\rho dV,$$
$$dF_y = \frac{y - \eta}{r^3}\rho dV,$$
$$dF_z = \frac{z - \zeta}{r^3}\rho dV,$$

这里

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

是该元素 (或者是点, 而认为质量集中于该点) 与点 A 的距离. 加起来得全引力 $\overrightarrow{F}$ 在各坐标轴上的射影

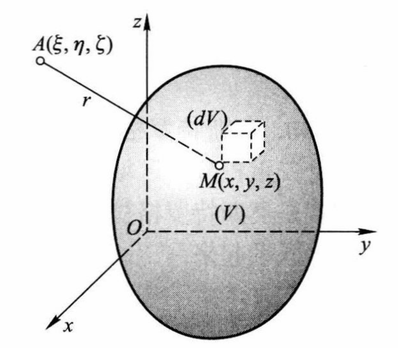


图 62

$$F_x = \iiint\limits_{(V)} \frac{x - \xi}{r^3}\rho dV, \quad F_y = \iiint\limits_{(V)} \frac{y - \eta}{r^3}\rho dV, \quad F_z = \iiint\limits_{(V)} \frac{z - \zeta}{r^3}\rho dV. \tag{13}$$

同样也可决定该立体在一点上的位势:

$$W = \iiint \frac{\rho dV}{r}. \tag{14}$$

①参看 **370** 段脚注.

如果点 A 在体外, 则这些积分全都是常义的. 在这情形可以依据类似对单积分所用的想法 [**297** 段] 将积分 W 对变量 ξ, η, ζ 中任何一个进行积分号下的微分. 结果我们得到

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = F_x, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = F_y, \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta} = F_z. \tag{15}$$

点 A 属于体 (V) 时则在此点上 $r = 0$, 而在 (13) 及 (14) 中的被积函数在其邻近不再有界. 但这些积分作为 "反常" 积分则仍存在, 并且对它们基本关系式 (15) 仍成立.

附注 在 **345** 段对均匀柱体 ($\rho = 1$) 的静矩我们有了公式

$$K_{yz} = \iint\limits_{(P)} zxdxdy, \quad K_{zx} = \iint\limits_{(P)} zydxdy, \quad K_{xy} = \frac{1}{2}\iint\limits_{(P)} z^2dxdy.$$

它们当然可由一般公式 (9) 推出.

例如, 我们有

$$K_{xy} = \iiint\limits_{(V)} zdV = \iint\limits_{(P)} dxdy \int_0^{z(x,y)} zdz;$$

但

$$\int_0^{z(x,y)} zdz = \frac{1}{2}z^2\Big|_{z=0}^{z=z(x,y)},$$

这就导出了所求的结果.

在 **345** 段里最后一个积分的计算是用力学中的想法 (关于细竖条的静矩) 替代的.

§2. 奥斯特罗格拉茨基公式

380. 奥斯特罗格拉茨基公式 在二重积分的理论中我们熟悉了一个联系平面区域上二重积分与区域边界上线积分的格林公式. 在三重积分理论中与此公式相类似的就是奥斯特罗格拉茨基公式, 它把空间区域上的三重积分与该区域边界面上的面积分联系起来.

我们来考虑一个立体 (V) (图 59), 它的边界是光滑曲面

$$\begin{matrix} (S_1) & z = z_0(x,y) \\ (S_2) & z = Z(x,y) \end{matrix} \qquad (z_0 \leqslant Z)$$

及柱面 (S_3). 这柱面的母线平行于 z 轴, 准线则为 xy 平面上那逐段光滑曲线 (K) (面积为 0), 它包围着区域 (D), 即立体 (V) 在 xy 平面上的射影.

设在区域 (V) 内定义了一个函数 $R(x,y,z)$, 它连同其导数 $\frac{\partial R}{\partial z}$ 在全区域 (V) 及其边界上都是连续的. 于是成立下列公式:

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{(S)} Rdxdy, \tag{1}$$

这里 (S) 是包围该立体的曲面, 而右边的积分是展布在它的外侧上的.

事实上, 按 **378** 段公式 (7a)

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{(D)} dxdy \int_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz$$

$$= \iint\limits_{(D)} R(x,y,Z(x,y))dxdy - \iint\limits_{(D)} R(x,y,z_0(x,y))dxdy.$$

如果考虑面积分, 则由 **372** 段公式 (3) 和 (3a) 有

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{(S_2)} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{(S_1)} R(x,y,z)dxdy,$$

这里右边的积分第一个展布在曲面 (S_2) 的上侧, 第二个展布在曲面 (S_1) 的下侧. 这等式在其右边添加一个展布在曲面 (S_3) 外侧的积分

$$\iint\limits_{(S_3)} R(x,y,z)dxdy$$

后仍然成立, 因为所添积分等于 0 [**372** 段, (5)]. 将三个面积分合并成一个, 我们就得到公式 (1), 它就是奥斯特罗格拉茨基公式的一个特例.

不难理解, 公式 (1) 对可以分解成所研究过的类型的更广大的一类立体也是正确的. 也可以证明, 公式 (1) 一般对任何逐片光滑曲面所包围的立体都是成立的.

与公式 (1) 相似我们还有下列的公式:

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{(S)} Pdydz, \tag{2}$$

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{(S)} Qdzdx, \tag{3}$$

这里函数 P 与 Q 连同其导函数 $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ 都是在区域 (V) 内连续的.

将 (1), (2), (3) 三个公式加在一起, 我们就得出一般奥斯特罗格拉茨基公式:

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

$$= \iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy. \tag{4}$$

它将展布在闭曲面外侧的一般形式的第二型面积分表示为该曲面所包之立体上的三重积分.

如果引入第一型的面积分, 则可得出奥斯特罗格拉茨基公式的另一很有用而容易记忆的形式:

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_{(S)} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)dS, \tag{5}$$

这里 λ, μ, ν 是曲面 (S) 的外法线与各坐标轴所成之角.

附注 I 有时奥氏公式也系以高斯的名字. 但高斯只接触到这公式的一些很窄的特例并且每次重新作推导. 这公式的一般形式 (4) 是于 1828 年由奥斯特罗格拉茨基最先给出的, 他还将它应用到固体热传导问题上.

附注 II 格林公式、斯托克斯公式、奥斯特罗格拉茨基公式可以由这样一种思想统一起来: 它们都是将展布在某几何形象上的积分用其边界上的积分表出. 格林公式属二维空间的情形, 斯托克斯公式属二维而 "弯曲" 空间的情形, 奥斯特罗格拉茨基公式则属三维空间的情形.

积分学基本公式

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

也可看作属于这类公式的范畴 —— 是其一维空间的情形.

381. 奥斯特罗格拉茨基公式的几个应用实例 1) *用面积分表出立体的体积* 也和 **347** 段中一样, 我们可以在公式 (4) 中以种种方式选择函数 P, Q, R, 使三重积分中被积函数等于 1, 如此这积分就化为立体 (V) 的体积 V. 这样体积 V 就表示成了伸展在该立体 (V) 的界面 (S) 上的面积分. 例如, 在 (4) 中依次令

$$P = x, Q = 0, R = 0; \quad P = 0, Q = y, R = 0; \quad P = 0, Q = 0, R = z,$$

就得出公式

$$V = \iint\limits_{(S)} xdydz = \iint\limits_{(S)} ydzdx = \iint\limits_{(S)} zdxdy, \tag{6}$$

这里所有积分都是沿曲面 (S) 的外侧来取的. 比较方便的是一个对称的公式, 相应于

$$P = \frac{1}{3}x, \quad Q = \frac{1}{3}y, \quad R = \frac{1}{3}z;$$

它有这样的形状:

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

或者化为第一型积分成

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} (x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu)dS$$

(这里 $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ 表示曲面外法线 $\overrightarrow{n}$ 的方向余弦).

这公式还可用另一方式表出: 如果考虑联结原点与曲面上变点的向量 $\overrightarrow{r}$ 以及其在各坐标轴上的射影 x, y, z, 则括号中的式子可写成

$$r \cdot \cos(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{n})$$

而最后有

$$V = \frac{1}{3} \iint_{(S)} r \cdot \cos(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{n}) dS.$$

在这样的形式之下, 这结果高斯在 1813 年就已接触到了.

2) 刚体闭曲面的平衡 我们来证明, 全面受均匀压力的刚体闭曲面恒保持平衡.

为此我们来证明, 所有加于曲面上的力的主向量及主矩 (对任何点而言) 都等于 0.

取出曲面的一个元素 (dS). 如果以 $p =$ 常数表示压强, 即施于单位面积上的力, 则沿其法线加于元素 (dS) 上的力元素在各轴上的射影为

$$-p\cos\lambda dS, \quad -p\cos\mu dS, \quad -p\cos\nu dS \tag{7}$$

(加负号是因为压力是向着曲面内部的; 而 λ, μ, ν 是外法线与坐标轴间所成的角).

主向量的射影 R_x, R_y, R_z 可由力的元素射影 (7) 加起来得出:

$$R_x = -p \iint_{(S)} \cos\lambda dS, \quad R_y = -p \iint_{(S)} \cos\mu dS, \quad R_z = -p \iint_{(S)} \cos\nu dS.$$

但这些积分全等于 0, 这只要在奥氏公式中令

$$P = 1, Q = R = 0; \quad Q = 1, P = R = 0; \quad R = 1, P = Q = 0$$

即可看出. 所以, 压力的主向量等于 0.

要决定力元素系的主矩, 比如说, 对坐标原点的矩, 我们来把下列力矩元素在各轴上的射影加在一起:

$$p(z\cos\mu - y\cos\nu)dS, \quad p(x\cos\nu - z\cos\lambda)dS, \quad p(y\cos\lambda - x\cos\mu)dS^{①}.$$

如此, 压力对原点的主矩其射影为:

$$L_x = p \iint_{(S)} (z\cos\mu - y\cos\nu)dS, \quad L_y = p \iint_{(S)} (x\cos\nu - z\cos\lambda)dS,$$

$$L_z = p \iint_{(S)} (y\cos\lambda - x\cos\mu)dS.$$

如果在奥氏公式中取 $P = 0, Q = pz, R = -py$, 则得 $L_x = 0$. 同样可证 $L_y = L_z = 0$. 故 (对原点的) 主矩等于 0. 如此我们的证明完成了.

---

① 如果加于点 (x, y, z) 的力沿各轴的分力是 X, Y, Z, 则对点 (ξ, η, ζ) 的力矩在各轴上的射影是

$$L_x = (y - \eta)Z - (z - \zeta)Y, \quad L_y = (z - \zeta)X - (x - \xi)Z, \quad L_z = (x - \xi)Y - (y - \eta)X.$$

3) 阿基米德定律 大家知道, 液体加于浸没其中的小块面积压力, 方向是沿着该面积的法线的, 大小则等于以该面积为底而以浸没的深度为高的液柱的重量. 现在假设一个刚体 (V) 在液体中浸没; 在其表面 (S) 的每一元素 (dS) 上液体按上述定律加以压力, 现在来决定压力元素的合力及其作用点.

为了解决这个问题, 我们选择一坐标系: 将 xy 平面放在液体水平面上, 而 z 轴垂直朝下.

设液体比重等于 ρ, 而元素 (dS) 的浸没深度为 z; 于是该元素所受压力为

$$\rho z dS,$$

而其在各轴上射影为:

$$-\rho z\cos\lambda dS, \quad -\rho z\cos\mu dS, \quad -\rho z\cos\nu dS.$$

如此主向量在各轴上的射影为:

$$R_x = -\rho\iint\limits_{(S)} z\cos\lambda dS, \quad R_y = -\rho\iint\limits_{(S)} z\cos\mu dS, \quad R_z = -\rho\iint\limits_{(S)} z\cos\nu dS.$$

由奥氏公式, 也和前一问题一样, 不难得出

$$R_x = R_y = 0, \quad R_z = -\rho\iiint\limits_{(V)} dV = -\rho V.$$

如此, *压力的主向量方向是垂直向上的, 其大小即等于物体所排出的液体的重量.*

现在来考虑这些力元素对物体重心 $C(\xi, \eta, \zeta)$ 的矩 (*今后所指的都是在质量均匀分布之下的几何体的质心, 这与物理的体的重心未必相同*). 矩元素沿各坐标轴的分量是

$$\rho z[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu]dS, \quad \rho z[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda]dS,$$
$$\rho z[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]dS,$$

从而 (对点 C 的) 主矩的分量为:

$$L_x = \rho\iint\limits_{(S)} z[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu]dS,$$
$$L_y = \rho\iint\limits_{(S)} z[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda]dS,$$
$$L_z = \rho\iint\limits_{(S)} z[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]dS.$$

应用奥氏公式于第一积分, 得

$$L_x = \rho\iiint\limits_{(V)}\left[\frac{\partial z(z-\zeta)}{\partial y} - \frac{\partial z(y-\eta)}{\partial z}\right]dV$$
$$= \rho\iiint\limits_{(V)}(\eta - y)dV = \rho\left[\eta V - \iiint\limits_{(V)} y dV\right] = 0,$$

因为积分 $\iiint\limits_{(V)} y dV$ 是该立体对 xz 平面的静矩, 即等于 ηV. 同样可证 $L_y = 0$; 最后可直接得出 $L_z = 0$.

所以, 压力对重心的主矩等于 0. 将这话与前面所证关于主向量的命题相对照可得出如下结论: 物体浸没于液体中时, 受到液体一个压力, 即等于物体排开液体的重量; 此力作用于该 (几何) 体重心, 而方向垂直朝上.

4) 面积分的研究　设在三维空间某开区域 (T) 内给定了连续函数 P, Q, R. 取一个任意的闭曲面 (S), 它落在该区域内并包围着一个立体. 于是来考虑面积分

$$\iint\limits_{(S)} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint\limits_{(S)} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu) dS. \tag{8}$$

函数 P, Q, R 应满足些什么条件才能使积分 (8) 恒等于 0 呢?

这问题与沿闭路线积分等于 0 的问题相似 [**348** 及 **374** 段], 它是用格林公式或斯托克斯公式很容易地被解决了. 当前这个问题自然也可利用奥氏公式, 而假设公式中所出现的函数 P, Q, R 的导函数都存在并且连续.

但是在当前情形为了能将积分 (8) 按奥氏公式予以变换, 必须对基本区域 (T) 加上一个限制. 即要: 只要任何包围立体 (V) 的简单闭曲面属于区域 (T), 则该立体也就完全被包含在区域 T 内. 具有这种性质的区域称为 ("依空间") 单连通的 [参看 **374** 段]. 这一类型的单连通性的特点就是没有 "空洞", 哪怕这种空洞只是一些点. 对于不伸展到无穷的立体, 不妨直截了当就要求它的边界是单个闭曲面 [参看 **348** 段]. 所以, 与前面, 例如 **374** 段所说 "依曲面" 单连通性不同, 这里环是单连通的立体, 而空心球就不是了.

奥氏公式立即引到所求的条件:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \tag{B}$$

这条件显然是充分的; 而利用三重积分对区域的微分 [**377** 段, 8°] 不难证明它也是必要的.

也和线积分的情形相似, 沿闭曲面的积分是否等于 0 就看沿所给边界所 "张" 闭曲面的积分是否与曲面的形状无关. 这我们不来细讲了.

§3. 三重积分变量替换

382. 空间区域的变换　**352** 段关于平面区域变换的想法可以很自然地转移到空间区域的情形上来.

设有一空间, 其中有直角坐标系 xyz, 另一空间则有坐标系 $\xi\eta\zeta$. 我们来考虑这些空间中的两个闭区域 (D) 及 (Δ), 分别为曲面 (S) 及 (Σ) 所包围, 这些界面我们总假设是逐片光滑的, 更设这两个区域间彼此有相互单值而连续的关系, 以下列公式表出:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta), \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta), \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

同时曲面 (Σ) 与曲面 (S) 上的点必须彼此相应.

设函数 (1) 在区域 (Δ) 内有连续偏导函数, 于是函数行列式

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}$$

也是 (Δ) 内的连续函数. 这里我们也认为, 这行列式永异于 0 而保持一定的正负号 [参看 **352** 段].

于是公式 (1) 将区域 (Δ) 内逐片光滑曲面变换为 (D) 内逐片光滑的曲面, 反过来也如此.

单值地决定 xyz 空间中一点的位置的数 ξ,η,ζ 称为该点的曲线坐标. xyz 空间中使这些坐标之一保持常数的点形成一坐标面. 这样的坐标面共有三族; 区域 (D) 的每一个点在每族中都有一个坐标面通过它.

但这只有假设区域 (D) 与 (Δ) 间有严格一一对应关系时才是这样. 实际上这一一对应关系常常是不成立的.

例 1) 柱面坐标 这可以说是 xy 平面中的极坐标与寻常笛卡儿竖坐标 z 的结合 (图 63). 其与笛卡儿坐标的关系可由这样的公式表出:

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z. \tag{2}$$

这些公式将区域

$$0\leqslant\rho<+\infty,\quad 0\leqslant\theta<2\pi,\quad -\infty<z<+\infty$$

映射到全 xyz 空间上. 但是, 直线 $\rho=0, z=z$ 则被映射为一点 $(0,0,z)$; 这破坏了一一对应关系.

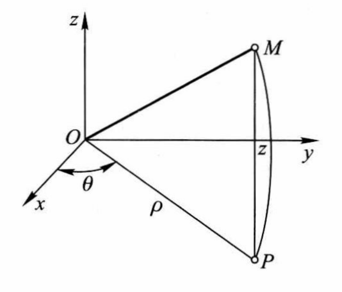


图 63

坐标面在当前情形是:

(a) $\rho=$ 常数, 即母线平行于 z 轴的柱面; 其准线为 xy 平面上以原点为中心的圆;

(b) $\theta=$ 常数, 即通过 z 轴的半平面;

(c) $z=$ 常数, 即平行于 xy 平面的平面.

变换的函数行列式是:

$$J=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\rho.$$

除了 $\rho=0$ 的情形外, 上式保持正号.

2) 球面坐标, 也叫做空间极坐标, 其与笛卡儿坐标的关系由下列公式表出:

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi,$$

这里

$$0\leqslant r<+\infty,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta<2\pi.$$

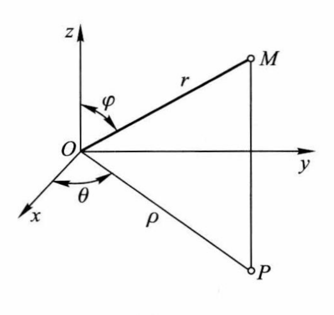


图 64

r, φ, θ 诸数的几何意义由图 64 表明: r 是联结原点 (极) 与所给的点 M 的径向量 OM, φ 是这径向量与 z 轴 (极轴) 所成之角; θ 是径向量 OM 在 (垂直于极轴的) xy 平面上的射影 $OP = r\sin\varphi$ 与 x 轴所成之角.

这里我们又遇到一一对应关系不成立的情形: $r\varphi\theta$ 空间的平面 $r = 0$ 映射为坐标原点 $x = y = z = 0$, 直线 $\varphi = 0(\pi), r = r$ 映射为一点

$$x = y = 0, \quad z = r.$$

坐标面是下列三族:

(a) $r =$ 常数, 即中心在坐标原点的同心球;

(b) $\varphi =$ 常数, 即以 z 轴为轴的圆锥;

(c) $\theta =$ 常数, 即通过 z 轴的半平面.

这变换的行列式是:

$$J = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi.$$

除了在上述的情形: $r = 0$ 或 $\varphi = 0(\pi)$, 此时行列式等于 0 外, 这个行列式保持正号.

383. 体积表示为曲线坐标 在 **382** 段的假设及表示法之下我们来把 xyz 空间内一个 (有限) 立体 (D) 的体积表示为展布在 $\xi\eta\zeta$ 空间内相应立体 (Δ) 上的三重积分①.

所求的体积首先可表示为第二型面积分 [参看 **380** 段, (6)]:

$$D = \iint\limits_{(S)} z dx dy,$$

展布在曲面 (S) 的外侧. 由此我们再设法将它化为寻常二重积分.

我们由曲面 (Σ) 的参变方程

$$\xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v), \quad \zeta = \zeta(u, v) \tag{3}$$

出发, 假设诸参变量在 uv 平面上某区域 (E) 内变化. 在变换公式 (1) 中将 ξ, η, ζ 换成 (3) 式; 于是我们显然可得出曲面 (S) 的参变方程:

$$x = x(\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v)) = x(u, v),$$
$$y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

①也如 **353** 段我们在此补充假设像

$$x''_{\xi\eta}, \quad x''_{\eta\xi}, \cdots, \quad y''_{\xi\eta}, \quad y''_{\eta\xi}, \cdots$$

等等偏函导数存在及连续; 这样证明起来容易些, 虽然对结果的正确性而言并不重要.

令

$$C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)},$$

按 **372** 段 (参看附注) 公式 (7) 我们有

$$D = \pm \iint\limits_{(E)} zC du dv.$$

因为 x, y 通过中间变量 ξ, η, ζ 而依赖着 u, v, 所以按已知的函数行列式性质 [**326** 段] 有

$$C = \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)}.$$

将 C 的表达式代入上面所得积分, 即得

$$D = \pm \iint\limits_{(E)} z\left[\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)}\right] du dv. \quad (4)$$

将这个积分与下列展布在曲面 (Σ) 外侧的第二型面积分

$$\iint\limits_{(\Sigma)} z\left[\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} d\xi d\eta + \frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)} d\eta d\zeta + \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)} d\zeta d\xi\right] \quad (5)$$

对比, 如果由参变方程 (3) 出发, 按类似 **372** 段公式 (7) 的公式将它变换为寻常二重积分, 则恰好得出积分 (4). 这两个积分间唯一的差别只可能在“正负”号上.

最后, 积分 (5) 可按奥氏公式变为这个区域 (Δ) 上的三重积分:

$$D = \pm \iiint\limits_{(\Delta)} \left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[z\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[z\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\right] + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[z\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]\right\} d\xi d\eta d\zeta.$$

被积式等于

$$\begin{aligned}&\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)} + \frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\\ &+z\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right].\end{aligned}$$

前三项之和等于函数行列式

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix},$$

这只要将它按最末一行诸元素展开即可看出; 方括号中三项之和则可直接算出等于 0[①].

如此, 我们得出公式

$$D = \pm \iiint\limits_{(\Delta)} \frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} d\xi d\eta d\zeta.$$

因为按假设函数行列式的正负号保持不变, 而这正负号就由该行列式带到积分上去, 所以 (因为这里认为 $D > 0$) 积分号前的正负号应与行列式的一致. 这使我们能将所得结果写成这最后的形式:

$$D = \iiint\limits_{(\Delta)} \left| \frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta \tag{6}$$

或者为简单起见将函数行列式写成 $J(\xi,\eta,\zeta)$, 则

$$D = \iiint\limits_{(\Delta)} |J(\xi,\eta,\zeta)| d\xi d\eta d\zeta. \tag{6*}$$

被积式

$$\left| \frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta = |J(\xi,\eta,\zeta)| d\xi d\eta d\zeta$$

通常叫做曲线坐标下的体积元素.

如果应用中值定理于公式 (6*), 则得关系式

$$D = |J(\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{\zeta})|\Delta, \tag{7}$$

这里 $(\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{\zeta})$ 是区域 (Δ) 内的一个点, 而 Δ 是这个区域的体积.

由此不难推出, 在区域 (Δ) 缩为一点 (ξ,η,ζ) 时我们将有 [参看 **377** 段, 8°]:

$$|J(\xi,\eta,\zeta)| = \lim \frac{D}{\Delta},$$

如此函数行列式的绝对值就是 $\xi\eta\zeta$ 空间 (在其已知点上) 变换为 xyz 空间时的延展系数.

---

① 显然

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)} = \frac{\partial^2 x}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\zeta} + \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 y}{\partial\zeta\partial\xi} - \frac{\partial^2 x}{\partial\zeta\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)} = \frac{\partial^2 x}{\partial\zeta\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi} + \frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\zeta} - \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 y}{\partial\zeta\partial\eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = \frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\zeta}\frac{\partial y}{\partial\eta} + \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\zeta} - \frac{\partial^2 x}{\partial\eta\partial\zeta}\frac{\partial y}{\partial\xi} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\zeta}.$$

将三等式两边加起来, 即得右边恒等于 0.

附注 公式 (6) [或 (6*)] 是在区域 (D) 与 (Δ) 间有相互单值的及连续的对应关系等已知假设之下推出的. 但也和在 **354** 段, 4° 中一样, 可以证明这些条件在个别点上或个别线和面上不成立时该公式仍正确, 只要函数行列式保持有界就行了.

384. 几何的推导法 公式 (6) 也可以依照奥斯特罗格拉茨基以纯几何的想法来推导 [参看 **355** 段]. 将 $\xi\eta\zeta$ 空间内度量以 $d\xi, d\eta, d\zeta$ 为边的无穷小长方体与 xyz 空间内包含在坐标面 "ξ" 与 "$\xi+d\xi$" 间, "η" 与 "$\eta+d\eta$" 间, "ζ" 与 "$\zeta+d\zeta$" 间的元素立体 (它可近似地看作斜平行体) 对比. 后者的体积就等于一个四面体的体积的六倍, 这四面体顶点在:

$$P_1(x,y,z),\quad P_2\left(x+\frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi, y+\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi, z+\frac{\partial z}{\partial\xi}d\xi\right),$$

$$P_3\left(x+\frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta, y+\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta, z+\frac{\partial z}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial\eta}d\eta\right),$$

$$P_4\Bigg(x+\frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial x}{\partial\zeta}d\zeta, y+\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial y}{\partial\zeta}d\zeta,$$
$$z+\frac{\partial z}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial z}{\partial\zeta}d\zeta\Bigg),$$

这个体积按解析几何中一个熟悉的公式可表示为行列式 (论绝对值)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi & \frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta & \frac{\partial x}{\partial\zeta}d\zeta \\ \frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi & \frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta & \frac{\partial y}{\partial\zeta}d\zeta \\ \frac{\partial z}{\partial\xi}d\xi & \frac{\partial z}{\partial\eta}d\eta & \frac{\partial z}{\partial\zeta}d\zeta \end{vmatrix} = \frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}d\xi d\eta d\zeta.$$

将这些 "体积元素" 加起来即得公式 (6).

如此, *这里问题的要点仍旧是: 在决定一个立体的体积时, 将它用坐标面网分成元素, 而不是用相互垂直的平面系来分.*

在简单的情形 "体积元素" 的曲线坐标表达式可以直接得出.

例如在柱面坐标的情形我们来考虑这样一个元素区域 (是在 xyz 空间内的), 它的边界是两个半径为 ρ 和 $\rho+d\rho$ 的圆柱面, 两个在高 z 和 $z+dz$ 处的水平平面, 及两个通过 z 轴而与 xz 平面交角为 θ 和 $\theta+d\theta$ 的半平面所围成的 (图 65). 把这区域近似地看作长方体则不难找出其边长为 $d\rho, \rho d\theta$ 和 dz, 如此其体积等于 $\rho d\rho d\theta dz$, 而表示此体积与空间 $\rho\theta z$ 中小长方体体积 $d\rho d\theta dz$ 之比的行列式等于 ρ.

同样, 在球面坐标的情形我们来考虑 (xyz 空间中的) 一个元素区域, 其边界由半径为 r 及 $r+dr$ 的球面, 圆锥面 φ 和 $\varphi+d\varphi$ 及半平面 θ 和 $\theta+d\theta$ 所组成 (图 66), 这区域也可当作长方体, 其边长为 $AD=dr, AB=rd\varphi$ 及 AC. 因为弧 AC 等于其射影 MN, 而这射影是由半径 $OM=r\sin\varphi$ 描出且相应于中心角 $d\theta$, 于是 $AC=r\sin\varphi d\theta$. 因此所考虑的区域的体积等于 $r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta$, 而函数行列式是 $r^2\sin\varphi$.

这两个由初等几何想法所得出的结果与 **382** 段, 1) 和 2) 说的一致.

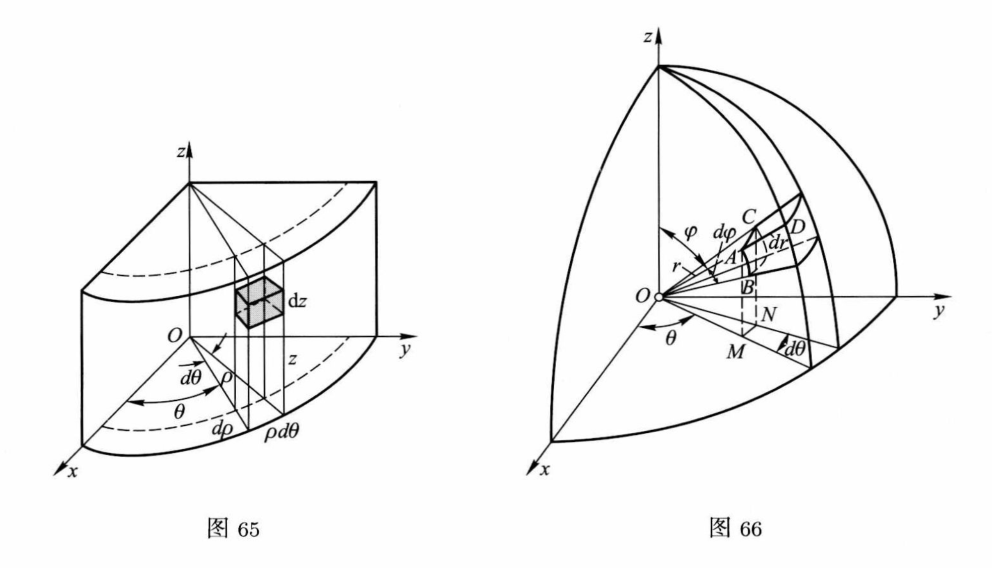


图 65 图 66

385. 三重积分的变量替换 用体积的曲线坐标表达式也不难建立三重积分变量替换的一般公式.

设 xyz 与 $\xi\eta\zeta$ 空间的区域 (D) 与 (Δ) 之间存在 **382** 段所说的关系, 认为推出公式 (6) 时的所有条件都已满足, 现在我们来证明下列等式:

$$\iiint\limits_{(D)} f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi,\eta,\zeta),y(\xi,\eta,\zeta),z(\xi,\eta,\zeta))|J(\xi,\eta,\zeta)|d\xi d\eta d\zeta \tag{8}$$

$$\left(\text{这里 } J(\xi,\eta,\zeta)=\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\right),$$

它完全与二重积分变量替换公式相似. 在此函数 $f(x,y,z)$ 假设是连续的, 如此等式 (8) 中两个积分无疑都存在; 只要证明等式本身成立就行了.

证明可以像 **356** 段中一样进行. 用逐片光滑曲面将区域 (D) 和 (Δ) 分为 (彼此相应的) 元素部分 (D_i) 和 (Δ_i) $(i=1,2,\cdots,n)$, 应用公式 (7) 于每一对区域 (D_i), (Δ_i) 上; 如此得出

$$D_i=|J(\overline{\xi}_i,\overline{\eta}_i,\overline{\zeta}_i)|\Delta_i, \tag{9}$$

这里 $(\overline{\xi}_i,\overline{\eta}_i,\overline{\zeta}_i)$ 是区域 (Δ_i) 的某一点, 而不是我们任意选择的. 我们取区域 (D_i) 的一个相应点 $(\overline{x}_i,\overline{y}_i,\overline{z}_i)$, 即令

$$\overline{x}_i=x(\overline{\xi}_i,\overline{\eta}_i,\overline{\zeta}_i),\quad \overline{y}_i=y(\overline{\xi}_i,\overline{\eta}_i,\overline{\zeta}_i),\quad \overline{z}_i=z(\overline{\xi}_i,\overline{\eta}_i,\overline{\zeta}_i), \tag{10}$$

并且做出 (8) 式中第一个积分的积分和:

$$\sigma = \sum_i f(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i) D_i.$$

这里将 $\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i$ 代以 (10) 式, 将 D_i 代以 (9) 式, 则得总和

$$\sigma = \sum_i f(x(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i, \overline{\zeta}_i), y(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i, \overline{\zeta}_i), z(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i, \overline{\zeta}_i)) |J(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i, \overline{\zeta}_i)| \Delta_i,$$

它显然已成为 (8) 式中第二个积分的积分和.

令区域 (Δ_i) 的直径趋于 0, 由于相对应关系的连续性, 区域 (D_i) 的直径从而也趋于 0. 总和 σ 应该同时趋于两个积分, 由此推得所求的等式.

也和二重积分的情形一样, 当上述假设在个别点上或有限多的线或面上不成立时, 公式 (8) 在许多情形还是成立的.

386. 例 1) 计算曲面

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$$

所包围立体的体积.

解 这立体对称于 yz 和 zx 平面, 因为 x 和 y 在方程中只以平方出现. 其次, 既然方程右边总是正的, 故必须 $z \geqslant 0$, 即该立体完全落在 xy 平面的上方. 因此只要计算其落在第一卦限中的那四分之一的体积就行了.

方程中有 $x^2 + y^2 + z^2$ 一式提醒我们采用球面坐标. 以

$$x = r \sin\varphi \cos\theta, \quad y = r \sin\varphi \sin\theta, \quad z = r \cos\varphi$$

代入曲面方程得其球面坐标方程如下:

$$r = a\sqrt[3]{\cos\varphi}.$$

因为第一卦限可由不等式

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

来表示, 而函数行列式 $J = r^2 \sin\varphi$ [**338** 段, 2)], 故我们有

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}} r^2 \sin\varphi dr = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = \frac{1}{3}\pi a^3.$$

2) 应用柱面坐标来计算体积时可引出一个有趣的公式.

我们来考虑一个立体 (V), 由逐片光滑曲面所围成, 假设通过 z 轴而相应于 $\theta =$ 常数的半平面截该体于某平面图形 (Q_θ) 而 θ 可由 α 变至 β (图 67). 于是

$$V = \iiint\limits_{(V)} \rho d\rho d\theta dz = \int_\alpha^\beta d\theta \iint\limits_{(Q_\theta)} \rho d\rho dz,$$

这里较方便的是对图形 (Q_θ) 采用随上述半平面绕 z 轴旋转的直角坐标系 ρz[①].

①而不是将与它全等的图形联系到 $\rho\theta z$ 空间中的固定平面 ρz 上去.

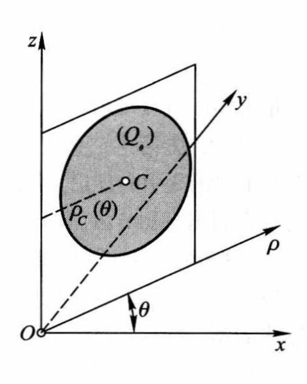


图 67

于是不难看出, 二重积分 $\iint\limits_{(Q_\theta)} \rho d\rho dz$ 即表示图形 (Q_θ) 对 z 轴的静矩, 即等于该图形面积 $Q(\theta)$ 乘以其质心 C 与 z 轴的距离 $\rho_C(\theta)$:

$$\iint\limits_{(Q_\theta)} \rho d\rho dz = Q(\theta) \cdot \rho_C(\theta).$$

以此代入体积表达式即得最后公式:

$$V = \int_\alpha^\beta Q(\theta) \cdot \rho_C(\theta) d\theta.$$

这公式是 П. П. 库斯科夫指出的. 在决定由 (固定的或变形的) 平面图形的螺旋运动得出的立体的体积, 例如螺丝钉、弹簧等时, 它特别方便.

如果立体 (V) 干脆是固定图形 (Q) 的旋转体, 而 (Q) 是环绕 z 轴旋转且与此轴不相交的, 则此时 $Q=$ 常数, $\rho_C=$ 常数, $\alpha = 0, \beta = 2\pi$, 而上式成这样形状:

$$V = Q \cdot 2\pi\rho_C.$$

它表出了著名的古尔丁定理: 平面图形绕图形外轴线所成旋转体的体积即等于该图形面积乘以其质心所描出圆周之数. 如此, 库斯科夫公式是这个古典定理的自然推广, 反过来也不难由它得出.

3) 求密度为 ρ 的均匀球对空间中任意一点 A (质量为 1) 的引力.

设球的半径等于 R, 而距离 $OA = a$. 坐标轴选取得使点 A 落在 z 轴正的部分. 于是

$$F_z = \iiint\limits_{(V)} \frac{\rho(z-a)}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}} dxdydz.$$

换为球面坐标得

$$F_z = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi\int_0^R \frac{\rho r^2(r\cos\varphi - a)\sin\varphi dr d\varphi d\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\varphi)^{3/2}}.$$

但在决定球壳的引力时 [**370** 段, 1)] 我们已求得二重积分

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \frac{(r\cos\varphi - a)\sin\varphi d\varphi d\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\varphi)^{3/2}} = \begin{cases} 0, & \text{在 } a<r \text{ 时}, \\ -\dfrac{4\pi}{a^2}, & \text{在 } a>r \text{ 时} \end{cases}$$

的值. 在 $a > R$ 时

$$F_z = -\frac{4\pi\rho}{a^2}\int_0^R r^2 dr = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{1}{a^2},$$

而在 $a < R$ 时

$$F_z = -\frac{4\pi\rho}{a^2}\int_0^a r^2 dr = -\frac{4}{3}\pi\rho a.$$

同时显然 $F_x = F_y = 0$. 所以, 在所有情形引力都指向球的中心.

在此球对于一个位于球外的点 $(a > R)$ 的引力就如同全部质量 $m = \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho$ 都集中于球心时的情形一样. 另一方面, 因对于一个落在球内部的点 $(a < R)$ 引力与 R 无关并且其值就如同 $R = a$ 的情形一样, 所以显然外面的球壳对内部的点上不起任何作用.

须指出, 在 $a > R$ 时 (被吸引点 A 落在球外时) 被积函数保持连续而计算不需任何说明. 在 $a \leqslant R$ 时 (点 A 落球内或球面上时) 情形就两样了, 在这情形点 A 邻近积分须理解为反常的. 经变量替换后奇点可消失; 这一情况使我们能确定积分的存在并且证明所有计算都是合理的.

387. 史话 三重积分最先出现于 1773 年拉格朗日的一篇论文里 (两年后才发表出来), 它基本上讲的是引力理论. 拉格朗日先决定元素长方体 $dxdydz$ 对一点的引力在坐标轴上的射影, 然后对它们施行积分法, 并且假设积分 "展布在立体的所有点上". 这里拉格朗日也给了三重积分的定义, 这积分 (也如欧拉对二重积分一样, 参看 **359** 段) 是由*累次积分*得出的; 在此明白指出了三个单积分每个应在什么积分限之下逐一来取. 同时拉格朗日将积分看作是*和*并且有时甚至用记号 Σ 来表示.

有鉴于积分之难 (甚至在球的情形), 拉格朗日指出, 要使它容易一点须利用别的变量, 于是他以一般形式提出三重积分中变量替换问题. 利用旧变量与新变量微分间的关系:

$$dx = Adp + Bdq + Cdr,$$

$$dy = Ddp + Edq + Fdr,$$

$$dz = Gdp + Hdq + Idr$$

($A, B, C, \cdots$ 是 p, q, r 的已知函数), 拉格朗日试图直截了当找出以新的体积元素 $dpdqdr$ 表出旧体积元素 $dxdydz$ 的式子而借助不足信的论证导出等式

$$dxdydz = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} dpdqdr^{①},$$

它一般说来并不正确 [参看 **359** 段]. 我们已经说过, 奥斯特罗格拉茨基在 1838 年指出了拉格朗日论证的错误; 奥氏也以几何方式解释了那个替代旧 "体积元素", 但并不等于它的式子. 其详参看 **384** 段.

§4. 场论初步

388. 数量与向量 积分学在数学物理及力学问题上的应用常常以化为向量形式较为方便. 所以读者熟悉一下向量分析中某些基本概念是有好处的, 利用这些概念可对积分构造及其表出它们之间的关系的积分学公式作出向量解释.

我们假设读者已经知道*数量*概念, 它完全可由其数值来表出 (例如体积、质量、密度、温度等); 也知道*向量*概念, 它要完全决定则还须指出其方向 (位移、速度、加速度、力等), 说到向量时我们将如惯例以有向线段来表示. 我们约定用上面带箭头的字母 $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{v}, \cdots$ 表示向量; 不带箭头的同样字母 $A, r, v, \cdots$ 表示向量的长:

$$A = |\overrightarrow{A}|, \quad r = |\overrightarrow{r}|, \quad v = |\overrightarrow{v}|, \cdots,$$

而带下标的字母 $A_x, r_y, v_n, \cdots$ 则分别表示其在 $x, y, n, \cdots$ 等轴上的射影. 向量 $\overrightarrow{A}$ 在坐标轴上的射影 A_x, A_y, A_z 完全决定向量的长 (数值) 及方向.

①拉格朗日不用我们通行的行列式记号而是写成展开的形式.

我们也认为读者已具有向量代数的基本知识. 现在只提一提, 所谓向量 $\overrightarrow{A}$ 与 $\overrightarrow{B}$ 的*数量积*是指数量 (数)

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = AB\cos(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}),$$

它以坐标轴上射影表出时则是

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \tag{1}$$

此后我们一律依据*反时针的旋转*, 也就是采取右手坐标系 [**362** 段, 附注]. 于是向量 $\overrightarrow{A}$ 与 $\overrightarrow{B}$ 的*向量积*是一长为 $AB\sin(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})$ 的向量, 它垂直于两相乘向量, 方向则指向这一侧, 使由 $\overrightarrow{A}$ 至 $\overrightarrow{B}$ 的旋转 (旋转角恒取小于 180° 之值) 看来是*反时针向的*; 这个乘积表示成 $\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}$. 向量积在各坐标轴上的射影是

$$A_yB_z - A_zB_y,\quad A_zB_x - A_xB_z,\quad A_xB_y - A_yB_x, \tag{2}$$

这里, 我们已说过, 是对右手坐标系而言的.

389. 数量场与向量场 如果对一个空间区域 (也可以是全空间) 中的每一点 M 都有一个数量或向量与之对应, 我们就说, 给定了一个*数量场*或*向量场*. 在以下各段中我们所要讨论的都是这种场.

数量场可举温度场或电位场为例. 如果点 M 的位置以其在某一任意选定的坐标系 $Oxyz$ 中的坐标来决定, 则所谓给定了某种数量 U 的场就等于说给定了一个数值函数 $U(x,y,z)$. 我们恒假设这个函数对每一变量都有连续偏导函数. 如果这些导数不同时等于 0, 则方程

$$U(x,y,z) = C \quad (C \text{ 为常数})$$

决定一个曲面 (无奇点) 而沿此曲面量 U 保持常数值; 这种曲面称为*等势面*. 整个所考虑的区域被这些曲面所充满, 而通过其每一点恒有一个且只有一个等势面. 显然, 等势面彼此都不相交.

向量场可举力场或速度场为例, 这类场我们已碰到过. 如果取一组坐标系 $Oxyz$ 为基础, 则要给定向量场 $\overrightarrow{A}$, 只要给定其在各坐标轴上的射影

$$A_x(x,y,z),\quad A_y(x,y,z),\quad A_z(x,y,z) \tag{3}$$

作为与向量 $\overrightarrow{A}$ 相关的点 M 的坐标的函数就行了. 而这些函数我们将假设有连续导函数. 在研究向量场时起重要作用的是*向量线*; 所谓向量线是指这样一条曲线而言, 它上面每点 M 处的方向都与该点的相应向量 $\overrightarrow{A}$ 的方向一致. 如果回忆 [**212** 段], 曲线切线的方向余弦就与微分 dx, dy, dz 成比例, 则向量线的特征可由等式

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$

表出. 在向量 $\overrightarrow{A}$ 不等于 0 的假设之下, 依据微分方程组理论中的 "存在定理" 可以证明, 整个所考虑的区域被向量线所充满, 而通过其中每一点恰恰有一条并且只有一条向量线. 不同的向量线彼此都不相交.

有时须考虑由向量线组成的曲面, 叫做*向量曲面*. 向量曲面的特征是, 其中每个点 M 的向量 $\overrightarrow{A}(M)$ 都落在曲面在相应点 M 处的切面上 (或者是, 在曲面所有的点上向量 $\overrightarrow{A}$ 在曲面的法线 $\overrightarrow{n}$ 上的射影 A_n 都等于 0). 如果在所考虑区域内任意取一条与向量线不同的线, 而通过其每点作一向量线, 则这些线的几何轨迹就成向量曲面. 如果上述的 "准线" 是闭曲线, 则在这情形得出的是管状的向量曲面, 它就叫做*向量管*.

390. 沿给定方向的导数 · 梯度 设给了一个数量场 $U(M)$. 在许多问题中我们对这个点函数沿任何指定方向的"变化速度"或其导数感兴趣. 我们来明确这个概念. 在任意有向直线 (或轴) l 上我们取一定点 M_0 及一变点 M (图 68); M_0M 理解为由 M_0 至 M 这一有向线段的大小, 即其带正负号的长度: M_0M 的方向与 l 轴方向一致时带正号, 相反时则带负号.

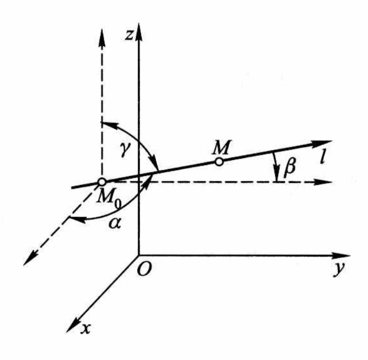


图 68

设 M 无限地趋近于 M_0. 所谓函数 $U(M)$ 在点 M_0 上沿 l 方向的导数就是极限

$$\lim_{M\to M_0}\frac{U(M)-U(M_0)}{M_0M};$$

用记号

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial l} \tag{4}$$

来表示.

这个导数就表示所说函数在点 M_0 沿方向 l 的"变化速度".

我们取一组坐标系 $Oxyz$ 而假设坐标函数

$$U(M)=U(x,y,z)$$

在所考虑区域中对每一变量都有连续偏导数. 于是, 如我们所要证明的, 导数 (4) 存在并由公式

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma \tag{5}$$

表出. 这里所有导数都是在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 上计算的, 而 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是轴 l 的方向余弦. 如果截取 $M_0M=t$, 则变点 M 的坐标为:

$$x=x_0+t\cos\alpha,\quad y=y_0+t\cos\beta,\quad z=z_0+t\cos\gamma.$$

所求的导数成为 t 的复合函数

$$U(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)$$

在 $t=0$ 时的导数. 按复合函数微分法则它的大小恰恰就如公式 (5) 所表示.

我们来引入一个向量 $\overrightarrow{g}$, 其在各坐标轴上的射影是

$$\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial z}; \tag{6}$$

它叫做 U 的梯度, 而用符号

$$\overrightarrow{g}=\operatorname{grad}U$$

表示. 如果回到公式 (5) 而以 $\overrightarrow{\lambda}$ 表示沿方向 l 的单位向量, 则也可将它写成这样:

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\operatorname{grad}U\cdot\overrightarrow{\lambda}=\operatorname{grad}_l U.$$

由此可看出, 这个导数恰好在 l 的方向与梯度的方向一致时达到其最大值, 而这最大值等于

$$|\operatorname{grad}U|=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

如此我们可以替代上述利用坐标系给出的梯度的形式的定义而给另一定义如下: 所谓数量 U 的梯度就是一个这样的向量, 它在数值上与方向上都由 U 的最大变化速度来表征. 这里已经完全不提坐标系, 由此可见梯度概念事实上与坐标系的选择无关.

不难看出, 梯度的方向与通过该点的等势面 $U(x, y, z) = C$ 的法线的方向一致.

如此, 数量场 $U(M)$ 产生一梯度向量场 $\operatorname{grad} U$.

哈密顿[1]引入一个符号向量, 其在坐标轴上的 "射影" 为

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}.$$

他称之为 "那卜拉" 而以记号 ∇ 来表示. 利用这种表示法可以写

$$\operatorname{grad} U = \nabla U.$$

事实上, 如果上述的 "向量" 形式地乘以数量 U, 就得到一个射影为 (6) 的向量!

例 1) 以 $\overrightarrow{r}$ 表示联结空间一定点 O 与一动点 M 的径向量 $\overrightarrow{OM}$, 而以 r 表其长且令

$$U(M) = \varphi(r),$$

这里 φ 是一个正数量自变量的数量函数, 具有正负号一定的导数. 等势面显然是半径为 r、中心为 O 的球面, 如此梯度的方向或与半径一致或与它正相反, 看 $\varphi'(r) > 0$ 或 < 0 而定. 不难看出,

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \varphi'(r) \cdot \frac{\overrightarrow{r}}{r}.$$

特别地

$$\operatorname{grad} \frac{c}{r} = -\frac{c}{r^3} \overrightarrow{r} \quad (c \text{ 为常数}).$$

如果在点 O 放一质量 m 而来考虑牛顿引力场, 则其在点 M 的强度 $\overrightarrow{F}$ 为

$$\overrightarrow{F} = -\frac{m}{r^2} \frac{\overrightarrow{r}}{r} = -\frac{m}{r^3} \overrightarrow{r}$$

因而

$$\overrightarrow{F} = \operatorname{grad} \frac{m}{r}.$$

一个已知向量场能否看作某一数量的梯度场, 这是一个很重要的问题, 其实这问题对我们并不新鲜; 下面再讲 [**393** 段].

2) 我们来考虑一个温度场 U. 取一曲面元素 (dS), 它带有以一定方式定了向的法线 n, 我们来计算在无穷小段时间 dt 内沿 n 的方向流过这一元素的热量 dQ. 热是由物体或介质的较热部分流向较冷部分的, 并且温度下降越快, 流得也越快. 通常认为上面所说的热量元素 dQ 与 dS, dt 及 $\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|$ 成正比例. 以 $k > 0$ 表示比例系数 (该处的 "导热系数"), 则可写

$$dQ = -k dS dt \frac{\partial U}{\partial n};$$

按上面所说在 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 为负数时, 也即沿 n 方向温度 U 降低时, 热量 dQ 为正数.

[1] W. R. Hamilton (1805—1865) 是英国数学家.

如果引入所谓热流向量

$$\overrightarrow{q} = -k\operatorname{grad} U,$$

则 dQ 的表达式可写得简单一点:

$$dQ = dSdtq_n.$$

391. 通过曲面的向量流量 现在设给了一个向量场 $\overrightarrow{A}(M)$, 即给了三个函数 (3). 我们取一曲面 (S) 并选定其一侧而以 $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ 表示相应的有向法线 n 的方向余弦. 于是面积分

$$\iint_{(S)} (A_x \cos\lambda + A_y \cos\mu + A_z \cos\nu) dS$$

称为向量 $\overrightarrow{A}$ 通过曲面 (S) 向着所指一侧的流量. 如果同一积分写成

$$\iint_{(S)} A_n dS$$

的形式, 则显然可知它是与坐标系选择法无关的.

现在来看几个例子.

1) “流量” 这个名称本身联系着某些流体力学的问题. 我们来看流体在空间中的运动; 在一般情形我们不假设它是稳定的, 如此运动的速度不仅与其相应点 M 的位置有关, 并且也与时间 t 有关. 我们要来计算在无穷小段时间 dt 内流体通过曲面 (S) 流向定侧的量. 通过曲面元素 (dS) 所流过的流体量本身充满一以 dS 为底 $v_n dt$ 为高的柱形 (图 69), 这里法线 n 假设即指向所选一侧①. 如果以 ρ 表示流体密度 —— 它也可与点的位置及时间有关 —— 则流过 dS 的流体质量为

$$\rho dS v_n dt.$$

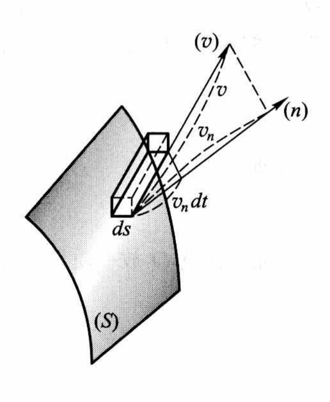


图 69

对全曲面 (S) 则得

$$dt \iint_{(S)} \rho v_n dS.$$

单位时间内流体量 Q 可表示为积分

$$Q = \iint_{(S)} \rho v_n dS, \tag{7}$$

读者当可认出这就是向量 $\rho\overrightarrow{v}$ 通过曲面 (S) 的 “流量”.

附注 因为我们不假设流体的运动是稳定的, 所以事实上 Q 本身一般说来是与时间有关的并且不妨更精确地叫做在所考虑时刻流体流过 (S) 的量的增长速度.

①参看 **335** 段最后一个脚注.

同样的话也适用于 "单位时间内流过 (S) 的热量" (参看下例): 所有这些量有速度的性质.

2) 同样也可以来谈热的流量. 容易看出, [在 **390** 段, 2) 的表示法之下] 时间 dt 内流过曲面 (S) 的热量等于

$$dt \iint\limits_{(S)} q_n dS.$$

如果将流过的热量化为单位时间, 则得

$$\iint\limits_{(S)} q_n dS,$$

即向量 $\overrightarrow{q}$ 通过曲面 (S) 的 "流量". 由此向量

$$\overrightarrow{q} = -k\operatorname{grad} U$$

也就有 "热流量向量" 之称.

392. 奥斯特罗格拉茨基公式 · 散度 回到向量场 $\overrightarrow{A}$ 的一般情形; 我们来看一个由闭曲面 (S) 所包围的立体 (V); 以 n 表示曲面外法线. 于是按奥氏公式 [**380** 段, (5)] 如果令其中 $P = A_x, Q = A_y, R = A_z$, 则向量 $\overrightarrow{A}$ 通过曲面 (S) 向外的流量可表示为三重积分

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(S)} A_n dS &= \iint\limits_{(S)} (A_x \cos\lambda + A_y \cos\mu + A_z \cos\nu) dS \\ &= \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dV.\end{aligned}$$

三重积分号下的式子叫做向量 $\overrightarrow{A}$ 的散度并表示成

$$\operatorname{div} \overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{8}$$

如此, 奥氏公式可写成

$$\iint\limits_{(S)} A_n dS = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \overrightarrow{A} dV, \tag{9}$$

这是常用的形式.

刚才引入的散度是一数量; 但它的定义形式上与坐标轴的选择有关, 为了免除这个缺点, 我们采取如下办法. 用任一表面为 (S) 的立体 (V) 将点 M 围起来而写出公式 (9); 如果两边除以体积 V 并将立体 (V) 缩为一点 M 而取极限, 则 [**377** 段, 8°] 右边恰得出点 M 上的 $\operatorname{div} \overrightarrow{A}$. 如此,

$$\operatorname{div} \overrightarrow{A} = \lim_{(V)\to M} \frac{\displaystyle\iint\limits_{(S)} A_n dS}{V}; \tag{10}$$

这个等式也可作散度定义, 而定义的这一形式已与坐标系选择法无关了.

这次向量场 $\overrightarrow{A}$ 产生一个数量场 $\operatorname{div} \overrightarrow{A}$.

散度定义 (8) 也可用哈密顿符号向量 ∇ 写成这样:

$$\operatorname{div} \overrightarrow{A} = \nabla \cdot \overrightarrow{A};$$

这只要回忆两向量的数量积分式 (1) 就可明白.

例 我们来讲一讲不可压缩流体 ($\rho = 1$) 在存在源或汇时的运动. 流体在单位时间内流过 (S) 的量, 即速度向量 $\overrightarrow{v}$ 的流量

$$\iint_{(S)} v_n dS$$

[参看 **391** 段, 1)] 叫做包含在闭曲面 (S) 内的源发生率. 如果源在所考虑的区域内连续地分布, 则可引入源密度概念. 这指的是按单位体积计算的包围在点 M 的立体 (V) 内源发生率的极限值, 即

$$\lim_{(V)\to M} \frac{\iint_{(S)} v_n dS}{V}.$$

但是, 如我们刚才所看到的 [参看 (10)], 这个极限就等于 $\operatorname{div} \overrightarrow{v}$; 如此, $\operatorname{div} \overrightarrow{v}$ 就是源密度.

对于有热源的热流量也可作同样的考察, 只是速度向量要换成热流量向量.

如果 $\operatorname{div} \overrightarrow{A} = 0$, 则这种场叫做管形的, 出于希腊文 $\sigma o\lambda \acute{\varepsilon} \nu$ (即管子). 假设场在空间中所占的是单连通 (依空间的) 区域, 则这个条件就等于要向量 $\overrightarrow{A}$ 通过任意而包围一个立体的闭曲面向外的流量须等于 0:

$$\iint_{(S)} A_n dS = 0$$

[**381** 段, (B)]. 现在我们来考察一段介于其两个任意断面 (S_1) 与 (S_2) 间的向量管 (图 70); 以 (S_3) 表管本身的表面. 于是按上述有

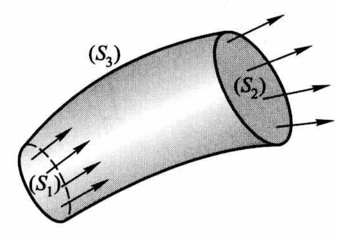


图 70

$$\left\{\iint_{(S_1)} + \iint_{(S_2)} + \iint_{(S_3)}\right\} A_n dS = 0,$$

而在所有情形法线都是向外的; 显然沿曲面 (S_3), $A_n = 0$ [**389** 段]; 如在断面 (S_1) 处改变法线方向使与 (S_2) 处法线方向一致, 则得等式

$$\iint_{(S_1)} A_n dS = \iint_{(S_2)} A_n dS.$$

如此我们得管形场的一个奇妙性质: 管形向量通过一向量管的各横断面的流量恒保持一常数值, 此常数值称为向量管的强度.

如回到上面所引向量场的流体力学的解释, 则在流体不可压缩且无源 ($\operatorname{div} \overrightarrow{v} = 0$) 的情形, 流体通过一向量管横断面的量对所有各断面都有同一数值.

393. 向量的循环量 · 斯托克斯公式 · 旋度 设又给定任一向量场 $\overrightarrow{A}(M)$. 沿所考察区域内某一曲线 (l) 所取的积分

$$\int_{(l)} A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_{(l)} A_l dl$$

叫做向量 $\overrightarrow{A}$ 沿曲线 (l) 的**线性**积分. 在闭曲线的情形这个积分就叫做向量 $\overrightarrow{A}$ 沿 (l) 的循环量.

如果场 $\overrightarrow{A}$ 是一个力场, 则线性积分就表示一点沿曲线 (l) 移动时场中力所做的功 [和平面的情形一样参看 **335** 段, 1)].

设想某一由闭路 (l) 所围的曲面 (S). 于是按读者已经知道的斯托克斯公式 [**373** 段, (11)] 向量 $\overrightarrow{A}$ 沿这道路的循环量可以表示为面积分

$$\int_{(l)} A_l dl = \iint\limits_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos\lambda + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos\mu + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos\nu \right\} dS.$$

在坐标轴上的射影为

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{11}$$

的向量叫做向量 $\overrightarrow{A}$ 的**旋度**, 并表示成

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{A}\text{①}.$$

如此, 斯托克斯公式可用向量的形式写成这样:

$$\int_l A_l dl = \iint\limits_{(S)} \operatorname{rot}_n \overrightarrow{A} dS. \tag{12}$$

向量沿一闭路的循环量就等于旋度通过这闭路所围曲面的流量. 在此闭路的环行方向与曲面的侧须如 **362** 段所说那样彼此相应.

上面所给旋度概念的定义有同样的缺点: 其中用到了坐标系. 取任一由已知点 M 出发的方向 n 而在与 n 垂直的平面上用一块具有边界 (λ) 小面积 (σ) 将点 M 围起来 (图 71), 于是按斯托克斯公式有

$$\int_{(\lambda)} A_\lambda d\lambda = \iint\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}_n \overrightarrow{A} d\sigma;$$

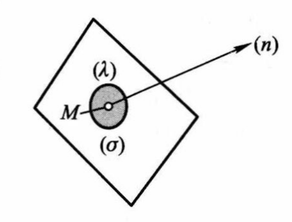


图 71

等式两边除以上述小块面积 σ 而将后者缩为所给的点, 则在极限情形得

$$\operatorname{rot}_n \overrightarrow{A} = \lim_{(\sigma)\to M} \frac{\displaystyle\int_{(\lambda)} A_\lambda d\lambda}{\sigma}.\text{②}$$

如此确定了 $\operatorname{rot} \overrightarrow{A}$ 在任何轴上的射影, 这就是说, 也可确定该向量本身而无须涉及预先选取的坐标系.

要注意, 这里向量场 $\overrightarrow{A}$ 产生了一个旋转的向量场 $\operatorname{rot} \overrightarrow{A}$.

用哈密顿向量 ∇ 也可将旋度定义简写成:

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{A} = \nabla \times \overrightarrow{A}$$

[参看向量积射影表达式 (2)].

---

① 出于英文 rotation 一字, 即 “旋转” 之意; 也常用 $\operatorname{curl} \overrightarrow{A}$ 这个记号, 出于英文 curl, 是 “卷” 的意思.

② 不难在此看出一种特殊的依区域的微分法; 让读者去论证.

例 我们来看某刚体绕一定点 O 的任意运动 (图 72). 运动学中证明过, 在任何时刻刚体的点的速度 $\vec{v}$ 的场可由公式

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

来确定, 这里 ω 是瞬时 "角速度", 而 $\vec{r}$ 是联结点 O 与刚体任一点 M 的径向量. 这个向量在任意坐标系 $Oxyz$ 的各轴上的射影是 [参看 (2)]

$$\omega_y z - \omega_z y, \quad \omega_z x - \omega_x z, \quad \omega_x y - \omega_y x.$$

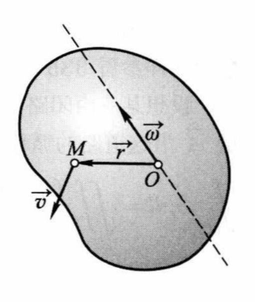


图 72

如果利用 (11) 式算出此场的旋度的射影, 则得 $2\omega_x, 2\omega_y, 2\omega_z$, 所以

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v}.$$

如此, 除去一数因子以外速度场 $\vec{v}$ 的旋度恰恰给出旋转的角速度; 这是 "旋度" 命名之由来.

现在我们回到这个问题: 在什么条件下所给的向量场 $\vec{A}$ 就成为某数量 U 的梯度场:

$$\vec{A} = \operatorname{grad} U. \tag{13}$$

这个等式就等价于下列三式:

$$A_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad A_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

也就等于说:

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

一式是函数 $U(x, y, z)$ 的全微分. 在等式 (13) 成立时, 场 $\vec{A}$ 就叫做位势场, 而原函数 U 叫做该场的位势函数.

如果限定所考虑的区域是 (依曲面) 单连通的, 则只要依照我们已知的事实 [**374** 段, 参看条件 (6)] 就可以说, 要 $\vec{A}$ 成位势场的必要而充分的条件是在全区域中成立等式

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y},$$

也就是要 $\operatorname{rot}\vec{A}$ 等于 0. 位势场概念就与 "无旋转" 的场的概念一致了, 在这种场里沿闭路的循环量为 0; 如果沿联结任意两点的曲线取线性积分, 则它的值与曲线形式无关.

所有这些事实在位势力场的情形可以用 "功" 的语言得到自然的解释. 例如, 我们知道, 不论是引力集中于个别中心时或吸引质量连续分布时牛顿引力场就是这样的.

§5. 多重积分

394. m 维体的体积与 m 重积分 由于分析及其应用的需要, 所研究过的那几种定积分 —— 单积分、二重积分、三重积分 —— 已经不够了.

在给单积分、二重积分、三重积分下定义时, 我们用到了线段长、平面形面积、空间立体体积等概念. 同样, m 重积分的定义要依据 m 维区域的体积①, 对于最简单的 m 维区域 —— m 维长方体

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_m, b_m], \tag{1}$$

①我们决定保留这个名称, 其意义当然是随 m 值而不同: 我们指的是 "m 维的" 体积.

所谓体积是指它的边长的乘积

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_m - a_m)$$

而言. 显而易见, 由有限个这种长方体所组成的立体其体积应如何了解. 可用初等方法证明, 体积与将它怎样分为长方体的分法无关.

一个 m 维体 (V) 的体积 V 可如通常方式由考虑这种内接及外接 "长方体" 而建立起来 [参看 **197** 段]. 我们将只考虑体积存在的体; 对于由光滑或逐段光滑曲面[①]围成之体必定是有体积的, 例如, 这几种最简单的 m 维区域: m 维单纯形

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \cdots, \quad x_m \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leqslant h$$

及 m 维球

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 \leqslant r^2;$$

下面我们要来计算其体积.

设在区域 (V) 中给了一个 m 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$; 于是, 将这区域分成许多元素部分并重复其他我们用惯的运算 [参看 **376** 段] 可得出 m 重积分

$$I = \overbrace{\int \cdots \int}^{m}_{(V)} f(x_1, x_2, \cdots, x_m) dx_1 dx_2 \cdots dx_m \tag{2}$$

的概念.

在被积函数连续的情形这积分必定存在.

这种积分可逐步化归低重积分直到单积分来计算. 在积分区域 (V) 是长方体 (1) 的情形, 有一个类似 **378** 段公式 (6) 的公式:

$$I = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_m}^{b_m} f(x_1, x_2, \cdots, x_m) dx_m. \tag{3}$$

对于由不等式

$$x_1^0 \leqslant x_1 \leqslant X_1, \quad x_2^0(x_1) \leqslant x_2 \leqslant X_2(x_1), \cdots,$$
$$x_m^0(x_1, \cdots, x_{m-1}) \leqslant x_m \leqslant X_m(x_1, \cdots, x_{m-1})$$

表示的更一般形式的区域可应用一个类似 **378** 段公式 (6a) 的公式:

$$I = \int_{x_1^0}^{X_1} dx_1 \int_{x_2^0(x_1)}^{X_2(x_1)} dx_2 \cdots \int_{x_m^0(x_1, \cdots, x_{m-1})}^{X_m(x_1, \cdots, x_{m-1})} f(x_1, x_2, \cdots, x_m) dx_m. \tag{4}$$

同样, 也成立其他与 **378** 段公式 (5a) 及 (7a) 相类似的公式 (对于各种相应形式的区域 —— 这些形式不难分别确定), 利用这些公式 m 重积分可逐步化归低重积分来计算 (重数合起来是 m).

所有这些都可像 $m = 2$ 或 $m = 3$ 的情形一样来证明, 用不到什么新的道理, 因此不必在此多说了.

---

①这里所谓光滑曲面就是 m 维空间中用 m 个 $m-1$ 元参变方程所确定的图像, 而方程中所出现的参变函数应连同其偏导数都连续, 且导数矩阵中的 $m-1$ 阶行列式要不同时等于 0.

附注 奥斯特罗格拉茨基在 1834 年的论文中最先仔细地定出多重积分所化归的积分中各个变量 $x_1, \cdots, x_m$ 的积分限, 这里多重积分是展布在所有满足不等式 $L(x_1, x_2, \cdots, x_m) \leqslant 0$ 的变量值上的. 这里我们也可找到一个我们已经知道的奥氏公式 [**380** 段, (4)] 的推广 —— 推广到任意多个变量的情形而把沿 $m-1$ 维闭曲面的积分与某一展布在该面所包围之体上的 m 重积分联系起来.

395. 例 1) 求 m 维单纯形

$$(T_m): x_1 \geqslant 0, \cdots, \quad x_m \geqslant 0, \quad x_1 + \cdots + x_m \leqslant h$$

的体积 T_m.

解 我们有

$$T_m = \overbrace{\int \cdots \int}^{m}_{(T_m)} dx_1 dx_2 \cdots dx_m = \int_0^h dx_1 \int_0^{h-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{h-x_1-\cdots-x_{m-1}} dx_m.$$

在这些单积分中按公式

$$x_1 = h\xi_1, \quad x_2 = h\xi_2, \cdots, x_m = h\xi_m$$

逐步变换变量就可得出下列结果:

$$T_m = h^m \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \cdots \int_0^{1-\xi_1-\cdots-\xi_{m-1}} d\xi_m$$
$$= h^m \overbrace{\int \cdots \int}^{m}_{\substack{\xi_1 \geqslant 0, \cdots, \xi_m \geqslant 0 \\ \xi_1 + \cdots + \xi_m \leqslant 1}} d\xi_1 \cdots d\xi_m = \alpha_m h^m,$$

这里 α_m 表示本积分相应于 $h = 1$ 时之值.

另一方面, 我们有 (顺便利用所得结果)

$$\alpha_m = \int_0^1 d\xi_m \overbrace{\int \cdots \int}^{m-1}_{\substack{\xi_1 \geqslant 0, \cdots, \xi_{m-1} \geqslant 0 \\ \xi_1 + \cdots + \xi_{m-1} \leqslant 1-\xi_m}} d\xi_1 \cdots d\xi_{m-1} = \alpha_{m-1} \int_0^1 (1-\xi_m)^{m-1} d\xi_m = \frac{\alpha_{m-1}}{m}.$$

所得递推关系式 (考虑到 $\alpha_1 = 1$) 给我们

$$\alpha_m = \frac{1}{m!},$$

如此终于有

$$T_m = \frac{h^m}{m!}.$$

2) 求下列 m 维球 [**126** 段] 的体积:

$$(V_m): x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 \leqslant R^2.$$

解 这次是要计算积分

$$V_m = \overbrace{\int \cdots \int}^{m}_{x_1^2+\cdots+x_m^2 \leqslant R^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_m.$$

令

$$x_1 = R\xi_1, \quad x_2 = R\xi_2, \cdots, \quad x_m = R\xi_m,$$

和刚才一样容易得出 $V_m = \beta_m R^m$, 这里系数 β_m 表示半径为 1 的 m 维球的体积.

要决定 β_m 我们进行这样的变换:

$$\beta_m = \overbrace{\int \cdots \int}^{m}_{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_m^2 \leqslant 1} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_m$$

$$= \int_{-1}^{1} d\xi_m \overbrace{\int \cdots \int}^{m-1}_{\xi_1^2+\cdots+\xi_{m-1}^2 \leqslant 1-\xi_m^2} d\xi_1 \cdots d\xi_{m-1}.$$

内层积分就是半径为 $\sqrt{1-\xi_m^2}$ 的 $m-1$ 维球的体积, 所以等于 $\beta_{m-1}(1-\xi_m^2)^{\frac{m-1}{2}}$. 代入后我们又得一递推关系式

$$\beta_m = 2\beta_{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta d\theta$$

或 [参看 **312** 段, 2)]

$$\beta_m = \beta_{m-1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}.$$

因为 $\beta_1 = 2$, 所以容易算出

$$\beta_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}.$$

所求体积等于

$$V_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} R^m.$$

对 m 为偶数及奇数的情形分别得公式

$$V_{2n} = \frac{\pi^n}{n!} R^{2n}, \quad V_{2n+1} = \frac{2(2\pi)^n}{(2n+1)!!} R^{2n+1}.$$

特别地, 对 V_1, V_2, V_3 我们自然得出很熟悉的值 $2R, \pi R^2, \frac{4}{3}\pi R^3$.

第二十四章　傅里叶级数

§1. 导言

396. 周期量与调和分析　在科学与技术中我们常要遇到周期现象, 即经过一段固定的时间 T (所谓 "周期") 后仍恢复其原先状态的现象. 例如, 蒸汽机的稳定运动就是如此, 它经一个整转后仍经历其原来的位置; 此外如交流电现象等等也是其例. 周期现象中各种有关数量, 经历周期 T 后仍恢复其原先的数值, 因此是时间 t 的周期函数, 可由等式

$$\varphi(t+T)=\varphi(t)$$

来表征. 例如, 交流电的强度与电压就是这样的量. 又如, 在蒸汽机的例子中, 十字头的行程、速度与加速度、蒸汽压力以及在曲柄销的切线力等也都是这样的量.

最简单的周期函数 (如不算常数) 是*正弦型量*: $A\sin(\omega t+\alpha)$, 这里 ω 是频率, 它与周期 T 的关系是

$$\omega=\frac{2\pi}{T}. \tag{1}$$

由这类简单周期函数可以组成比较复杂的周期函数. 显然, 用来组成复杂函数的正弦型量应该有不同的频率, 因为, 容易明白, 同频率的正弦型量相加仍成同频率的正弦型量, 得不出新的东西. 反之, 如果将一些像

$$\left.\begin{aligned}y_0=A_0,\quad y_1=A_1\sin(\omega t+\alpha_1),\quad y_2=A_2\sin(2\omega t+\alpha_2),\\ y_3=A_3\sin(3\omega t+\alpha_3),\cdots\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

这样的量加起来 (这些量除常数 A_0 外分别有频率

$$\omega,\quad 2\omega,\quad 3\omega,\cdots$$

—— 均为其中最小一个 ω 的倍数 —— 并且有周期

$$T,\quad \frac{1}{2}T,\quad \frac{1}{3}T,\cdots)$$

就可得出一个新的周期函数 (其周期为 T), 而与 (2) 型的量本质上不相同了.

例如我们在图 73 做出三个正弦型量之和:

$$\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 3t;$$

这个函数的图像的性质已与正弦型线显著不同. 对于 (2) 型量所组成的无穷级数之和则差别更为显著了.

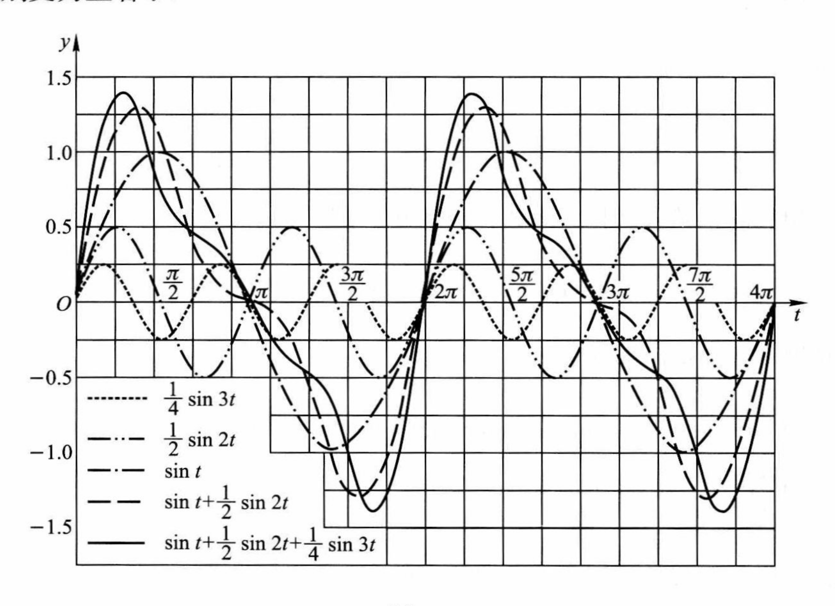


图 73

现在我们自然可提出反面的问题: 给了一个周期为 T 的函数 $\varphi(t)$, 能否将它表示为有限个甚或无限个 (2) 型正弦型量之和? 下面可以知道, 对很广大的一类函数这问题的答案是肯定的, 但要用到 (2) 型量的整个无穷序列. 对这类函数成立 "三角级数" 展开式:

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=A_0+A_1\sin(\omega t+\alpha_1)+A_2\sin(2\omega t+\alpha_2)+A_3\sin(3\omega t+\alpha_3)+\cdots\\&=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\alpha_n),\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $A_0, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2, \cdots$ 是常数, 对每一个这种函数有其特殊的值, 而频率 ω 则由公式 (1) 给出.

在几何上这就是说, 周期函数的图像可由一系列正弦型曲线叠加而得. 如果将每一正弦型量理解为表示力学上的简谐振动, 则也可以说, 这里由函数 $\varphi(t)$ 表示的

复杂振动可以分解为各不相同的简谐振动. 因此组成展开式 (3) 的各正弦型量叫做函数 $\varphi(t)$ 的调和分量或简称调和素 (第一调和素、第二调和素等). 分解周期函数为调和素的方法称为调和分析.

如果取

$$x = \omega t = \frac{2\pi t}{T}$$

作自变量, 则得 x 的函数:

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

它也是周期性的, 但具有标准周期 2π, 展开式 (3) 则成这样的形状:

$$\begin{aligned} f(x) &= A_0 + A_1 \sin(x + \alpha_1) + A_2 \sin(2x + \alpha_2) + A_3 \sin(3x + \alpha_3) + \cdots \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha_n). \end{aligned} \tag{4}$$

用二角和的正弦公式将此级数各项展开, 并令

$$A_0 = a_0, \quad A_n \sin \alpha_n = a_n, \quad A_n \cos \alpha_n = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

则得三角展开式的最后形式如下:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \end{aligned} \tag{5}$$

这个形式的展开式就是我们今后所要研究的①. 这里周期为 2π 的角 x 的函数终于表示为 x 的倍角的余弦及正弦展开式.

上面我们是由周期性振动现象及其相关的量出发而得出函数的三角级数展开式的. 但要注意, 这种展开式现在也常常用来研究只是在某有限区间上给出, 而完全与振动现象不相干的函数.

397. 决定系数的欧拉 – 傅里叶方法 为了确定一个周期为 2π 的已知函数 $f(x)$ 是否能有三角展开式 (5) 要由确定的一组系数 $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$ 出发. 我们来指出一种决定这些系数的方法, 它在 18 世纪后半叶为欧拉用过, 19 世纪初傅里叶也独立地使用过.

我们今后将假设函数 $f(x)$ 是在区间 $[-\pi, \pi]$ 内连续或逐段连续的②.

---

①由这展开式必要时当然不难反过来化为 (4) 型展开式.

②所谓函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内逐段连续是指: 它在该区间中除有限个点外都连续, 在这些点上则有跳跃. 如此, 区间 $[a, b]$ 可分为有限部分, 每部分中函数 $f(x)$ 均处处连续 —— 如以极限值代函数值时甚至在端点上也成连续. 可以把逐段连续函数看作是由一些连续函数 “粘连” 起来的, 只是在 “衔接点” 上 (以及区间两端) 函数值要特别予以规定.

我们假设展开式 (5) 成立而将它由 $-\pi$ 至 π 逐项积分, 如此得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right].$$

不难看出

及
$$\left.\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx &= \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx &= -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

所以求和号下的各项都等于 0 而最后得出

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.\tag{7}$$

要决定系数 a_m 之值我们假设等式 (5) 恒成立, 将它两边乘以 $\cos mx$ 而在同区间内逐项积分起来:

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx\\ &= a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx\right].\end{aligned}$$

右边第一项由 (6) 知其等于 0. 其次在 $m \neq n$ 时我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]dx = 0,\tag{8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]dx = 0,\tag{9}$$

并且还有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mxdx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}dx = \pi.\tag{10}$$

如此, 求和号下的各积分全都化为 0, 只有以 a_m 为系数的那个积分是例外. 由此这一系数就可定出:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx \quad (m = 1, 2, 3, \cdots).\tag{11}$$

同样, 预先将展开式 (5) 乘以 $\sin mx$, 然后逐项积分起来, 就定出正弦前面的系数:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx \quad (m = 1, 2, 3, \cdots).\tag{12}$$

这里除 (6) 和 (8) 外我们还用到了这两个容易验证的关系式:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mxdx = 0 \quad (n \neq m)\tag{13}$$

及

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mxdx = \pi. \tag{14}$$

公式 (7), (11) 及 (12) 称为欧拉 – 傅里叶公式; 用这些公式所算出的系数叫做所给函数的傅里叶系数, 由此组成的三角级数 (5) 则称为傅里叶级数. 本章中专讲这种级数.

现在我们对上述论证予以逻辑的评价. 既然"三角展开式 (5) 成立"这个出发点是假设的, 那么事实上究竟是否如此, 自然还成问题. 即便假设它真的成立, 我们按照欧拉和傅里叶的方法定出了展开式 (5) 的系数, 所持理由是否可信呢? 我们一再采用了级数的逐项积分法, 而这方法并非到处可用 [**269** 段]. 它的充分条件是要级数一致收敛. 所以, 能认为已严格建立的只是:

如果函数 $f(x)$ 能展为一致收敛级数 (5)[①], 则它一定是 $f(x)$ 的傅里叶级数.

如果不预先假设一致收敛性, 则我们的论证甚至不足证明函数只能展为傅氏级数. 那么这些验证究有怎样的意义呢? 只能将它们看作一种线索, 足以使我们知道在寻求所给函数的三角展开式时可以由其傅氏级数开始, 而必须 (完全严格地) 确定在什么条件下它收敛并且就收敛于所给的函数.

在未做到这一步以前我们只能形式地看待所给函数 $f(x)$ 的傅氏级数, 但对它不能肯定什么, 只能说它是由函数 $f(x)$ "产生"的而已.

它与函数 f 的这一关系, 通常可这样表示:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{5a}$$

而避免采用等号.

398. 正交函数系 上段讲的是一种典型的论证法, 在数学分析中研究许多展开式时常常要用到.

两个在区间 $[a,b]$ 内有定义的函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$, 如果其乘积有等于 0 的积分:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0,$$

则称为在该区间内正交的. 设有一函数系 $\{\varphi_n(x)\}$, 每个函数在区间 $[a,b]$ 内有定义并且连续或至少逐段连续. 如果该系中函数两两正交:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots; n \neq m), \tag{15}$$

则称之为一正交函数系(或函数正交系). 在此我们恒假设

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = \lambda_n > 0. \tag{16}$$

① 一致收敛性在级数各项一律乘以有界函数 $\cos mx, \sin mx$ 后仍保持不变.

在满足 $\lambda_n = 1\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 的条件时该系称为正规的. 如果不满足这样的条件, 则需要时可将它变为函数系 $\left\{\dfrac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$, 这就显然成为正规的了.

上面所考虑的在区间 $[-\pi, \pi]$ 内的三角函数系

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \cdots, \quad \cos nx, \quad \sin nx, \quad \cdots \tag{17}$$

正是正交函数系的一个最重要的例子, 它的正交性可由 (6), (8), (9) 及 (13) 等关系推知. 但由 (10) 和 (14) 看来它不是正规的. 乘以适当倍数后则不难将它化为正规的:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots. \tag{17*}$$

设在区间 $[a, b]$ 内给了任一正交系 $\{\varphi_n(x)\}$. 我们要来将定义在 $[a, b]$ 内的函数展为下列形式的 "函数 φ 的级数":

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots. \tag{18}$$

要决定这展开式的系数, 我们先假设这样展开是可能的, 然后仿照上面那个特例的手续进行. 即将展开式两边乘以 $\varphi_m(x)$, 再逐项积分起来:

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx.$$

由正交性 [参看 (15) 和 (16)], 右边所有积分除一个外全化为 0, 于是不难得出:

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \tag{19}$$

[公式 (7), (11), (12) 是这公式的特例].

如果一个级数 (18) 的系数由公式 (19) 所定, 则它称为所给函数的(广义) 傅里叶级数, 而其系数称为对函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 的 (广义) 傅里叶系数. 在正规函数系的情形公式 (19) 特别简单, 此时

$$c_m = \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx. \tag{19a}$$

当然, 这里仍可重复上段末尾所说的话. 对所给函数 $f(x)$ 做出的广义傅里叶级数只是形式上与该函数发生关系. 在一般情形函数 $f(x)$ 与其 (广义) 傅里叶级数之间的这种关系可表示为:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x). \tag{18a}$$

也和三角级数的情形一样, 这级数对函数 $f(x)$ 的收敛性尚待研究.

§2. 函数的傅里叶级数展开式

399. 问题的提出 · 狄利克雷积分 设 $f(x)$ 是连续函数或逐段连续函数, 其周期为 2π. 我们算出下列常数 (它的傅里叶系数):

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos mu du, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin mu du, \tag{1}$$
$$(m = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

并用来组成该函数的傅里叶级数:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx). \tag{2}$$

读者可注意到这里的表示法与 **397** 段里稍有不同: 系数 a_0 我们现在是按 a_m 的一般公式取 $m = 0$ 定出的, 和上段公式 (7) 不一样; 同时常数项则写成 $\frac{a_0}{2}$ 的形式.

附注 如果函数 $F(u)$ 是在任何有限区间内逐段连续的, 并且有周期 2π, 如此

$$F(u + 2\pi) = F(u),$$

则沿长 2π 的区间的积分

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(u)du$$

的值与 α 无关.

事实上, 限于连续函数 F 的情形时我们有

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(u)du = \int_{\alpha}^{0} F(u)du + \int_{0}^{2\pi} F(u)du + \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} F(u)du.$$

如果在最后一个积分里作替换 $u = 2\pi + t$, 则它化为积分

$$\int_{0}^{\alpha} F(t + 2\pi)dt = \int_{0}^{\alpha} F(t)dt,$$

因而只是正负号与第一个积分不同. 如此, 所考虑的积分终于等于积分

$$\int_{0}^{2\pi} F(u)du,$$

它已经不含 α 了. 不难将这结果推广到任意逐段连续函数的情形.

这话我们以后要用到. 特别是, 在决定傅里叶系数的公式 (1) 中积分可以沿任何长 2π 的区间来取; 例如, 可以写

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos mx dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin mx dx, \tag{1a}$$
$$(m = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

等等.

要研究级数 (2) 在任何定点 $x = x_0$ 的性状, 我们做出其部分和

$$s_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos mx_0 + b_m \sin mx_0)$$

的方便的表达式. 将 a_m 及 b_m 换成其积分式 (1), 将常数 $\cos mx_0, \sin mx_0$ 移到积分号下:

$$\begin{aligned} s_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)[\cos mu \cos mx_0 + \sin mu \sin mx_0]du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos m(u - x_0)\right\} du. \end{aligned}$$

不难验证恒等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos m\alpha &= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left\{\sin\frac{\alpha}{2} + \sum_{m=1}^{n}\left[\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(m - \frac{1}{2}\right)\alpha\right]\right\} \\ &= \frac{\sin(2n+1)\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

用它来变换积分号下的式子, 终于得出

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\sin(2n+1)\dfrac{u - x_0}{2}}{2\sin\dfrac{u - x_0}{2}}du. \tag{3}$$

这个积分通常称为狄利克雷积分. (虽然傅里叶早已接触到它!)

因为我们在此所处理的 u 的函数周期为 2π, 所以按前面说过的话积分区间可换成任何同样长的区间, 例如 $[x_0 - \pi, x_0 + \pi]$:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(u)\frac{\sin(2n+1)\dfrac{u - x_0}{2}}{2\sin\dfrac{u - x_0}{2}}du.$$

用替换 $t = u - x_0$ 将此积分变成:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t)\frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{1}{2}t}dt.$$

然后将此积分拆成两个: $\displaystyle\int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^{0}$, 并将第二个积分改变其变量的正负号而化归同

一区间 $[0,\pi]$; 于是得到傅里叶级数部分和的最后表达式如下:

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt. \tag{4}$$

如此, 问题就化为研究这个含参变量 n 的积分的性状了. 现在讨论的问题的特点是: 在这情形不能应用积分号下取极限的办法[①], 而这却是至今我们对含参变量积分求极限时所用过的唯一的方法 (参看第十八章). 这种情况在本章我们要系统地加以研究.

400. 基本引理 在继续我们的研究之前, 先来证明下面这一对以后论证很重要的黎曼引理:

如果函数 $g(t)$ 在某有限区间 $[a,b]$ 内连续或逐段连续, 则

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\sin pt dt=0,$$

并且同样

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\cos pt dt=0.$$

证明 我们只要假设函数 $g(t)$ 连续而证明第一个极限就够了.

预先注意, 无论是怎样的有限区间 $[\alpha,\beta]$, 我们总有这样的估计:

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin pt dt\right|=\left|\frac{\cos p\alpha-\cos p\beta}{p}\right|\leqslant\frac{2}{p}. \tag{5}$$

我们用一些点

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_i<t_{i+1}<\cdots<t_n=b \tag{6}$$

将区间分为 n 部分, 并且相应地将积分也分成 n 个:

$$\int_a^b g(t)\sin pt dt=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)\sin pt dt.$$

以 m_i 表示 $g(t)$ 在第 i 小区间中的最小值, 于是可将此式变成

$$\int_a^b g(t)\sin pt dt=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}[g(t)-m_i]\sin pt dt+\sum_{i=0}^{n-1}m_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sin pt dt.$$

①在这情形积分号下表达式当 $n\to\infty$ 时完全没有极限.

如果 ω_i 是函数 $g(t)$ 在第 i 个小区间内的摆幅, 则在该区间内 $g(t)-m_i \leqslant \omega_i$; 由不等式 (5) 现在不难给这个积分得出如下的估计:

$$\left|\int_a^b g(t)\sin ptdt\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t_i + \frac{2}{p}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|.$$

给定了任意一数 $\varepsilon>0$ 我们先选择一种分法 (6), 使 $\omega_i<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, 故

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t_i<\frac{\varepsilon}{2};$$

这是可以做到的, 因为函数 g 是连续的. 现在, 因为 m_i 已由此定出, 所以可以取

$$p>\frac{4}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|$$

而对这些 p 值得出

$$\left|\int_a^b g(t)\sin ptdt\right|<\varepsilon,$$

如此就证明了本引理.

请读者注意, 这里已经定出了积分所趋的极限而没有用到积分号下的极限过程.

如果记得表出傅里叶级数的公式 (1), 则可由此得出下面第一个直接的推论:

逐段连续函数的傅里叶系数 a_m, b_m 在 $m\to\infty$ 时趋于 0.

401. 局部化原理 上段证明的引理的第二个直接推论是所谓 "局部化原理".

取任意一正数 $\delta<\pi$, 将 (4) 式中积分拆成两个:

$$\int_0^\pi=\int_0^\delta+\int_\delta^\pi.$$

如果第二个写成

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\dfrac{1}{2}t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt,$$

则显然正弦前的乘数

$$\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\dfrac{1}{2}t}$$

是区间 $[\delta,\pi]$ 内 t 的逐段连续函数, 因为分子上的 t 的函数是这样的函数, 同时分母 $2\sin\dfrac{1}{2}t$ 在这区间内不等于 0, 且保持连续. 按引理这个积分当 $n\to\infty$ 时趋于 0, 如

此傅里叶级数部分和 $s_n(x_0)$ 的极限的存在性以及此极限的值都可以只由下列积分完全确定:

$$\rho_n(\delta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{1}{2}t}dt. \tag{7}$$

但这个积分只包含函数 $f(x)$ 相应于自变量由 $x_0-\delta$ 变至 $x_0+\delta$ 的那些值. 这简单论证就证明了下面的 "局部化原理":

定理 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数在某点 x_0 上的性状[①] 完全取决于此函数在该点直接邻近所取的值, 即该点任意小邻域中的值.

所以, 比如说如果取两个这样的函数, 它们在点 x_0 的任意小邻域内的值相同, 则无论在这邻域外如何不同, 这两个函数的傅里叶级数在点 x_0 的性状总是一样的: 或者同为收敛, 并且收敛于同一个和, 或者同为发散. 如果注意到这两个函数的傅里叶系数是取决于全体函数值并且是可以完全不同的, 这个结果就显得更令人惊讶了.

上述定理通常称为黎曼定理, 因为这是他在 1853 年所证明的一个较一般的定理的推论. 但是应该指出, "局部化原理" 的概念已见于奥斯特罗格拉茨基 1828 年一篇关于数学物理的论文里, 也反映在罗巴切夫斯基 1834 年关于三角级数的研究里.

402. 函数的傅里叶级数表示法 我们已经得出过傅里叶级数部分和 $s_n(x_0)$ 的积分表示式 (4), 现在继续研究它的性状.

在此我们对函数 $f(x)$ 加上更强的条件, 即假设它在区间 $[-\pi,\pi]$ 内逐段可微分[②].

于是成立这一般的

定理 如果函数 $f(x)$ 有周期 2π 且在区间 $[-\pi,\pi]$ 内逐段可微分, 则其傅里叶级数在每点 x_0 上都收敛并且有总和

$$S_0=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

如果该函数在点 x_0 上连续, 则总和显然等于 $f(x_0)$.

证明 注意, 等式 (4) 对每个满足所设条件的函数都成立. 如果特别取 $f(x)\equiv 1$, 则 $s_n(x)\equiv 1$, 而由 (4) 得

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{1}{2}t}dt. \tag{8}$$

[①] 我们指的是级数在点 x_0 上的收敛性和发散性以及 (在收敛时) 级数有怎样的和等情况.

[②] 函数 $f(x)$ 在下述情形下称为在区间 $[a,b]$ 内逐段可微的: 该区间可分为有限多段, 在每段内部该函数均可微分, 而在端点上则不但有极限值, 并且以这些极限值代替函数值时也就有单侧导数. 可以想象逐段可微分函数是由一些在部分闭区间中可微分 (故也连续) 的函数 "粘连" 起来的, 只是在 "衔接点" (以及总区间的两端 a 与 b) 上函数值要特别规定.

两边乘以常数 S_0 而由 (4) 减去它, 得

$$s_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt;$$

我们需证明右边的积分 $n\to\infty$ 时趋于 0.

将它表示为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt, \tag{9}$$

这里

$$g(t) = \left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} - \frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}\right]\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}; \tag{10}$$

如果能确定这函数逐段连续, 则由 **400** 段的引理已可推知积分 (9) 在 $n\to\infty$ 时有极限 0. 但在区间 $(0,\pi]$ 内函数 $g(t)$ 一般是连续的, 至多可能要去掉有限个点, 在这些点上该函数有跳跃, 因为函数 f 是这样的. 剩下成问题的只在函数 $g(t)$ 于 $t\to+0$ 时的性状了.

我们来证明这有限极限存在:

$$\lim_{t\to+0} g(t) = K.$$

于是令 $g(0)=K$ (至今此值未正式定义), 因而 $g(t)$ 在点 $t=0$ 成为连续, 如此引理就可应用了. 但等式 (10) 右边第二乘数显然有极限 1, 现在来看方括号中的式子.

为简单起见先设点 x_0 落在函数 $f(x)$ 可微分的区间的内部. 于是 $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$, 并且比率

$$\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}, \quad \frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{-t} \tag{11}$$

每个都趋于极限 $f'(x_0)$, 而 $[\cdots]$ 趋于 0. 如果 x_0 是 “衔接点”, 则此时它可以是连续点, 也可以是间断点. 在第一情形我们又遇到比率 (11), 但它们这次趋于不同的极限 —— 各趋于右导数及左导数 (图 74a). 在不连续的情形也可得类似的结果, 但这里函数值 $f(x_0)$ 要换成那些 “粘连” 成所给函数的函数的值 $f(x_0\pm 0)$, 而诸比率的极限则为那些函数在 $x=x_0$ 时的单侧导数 (图 74b).

如此, 我们的结论在一切情形都成立.

403. 非周期函数的情形 整个上面所建立的理论的出发点是: 假设所给函数对 x 所有实数值都有定义并且有周期 2π. 然而最常遇到的是非周期性的函数 $f(x)$, 有时甚至只在区间 $[-\pi,\pi]$ 内给出.

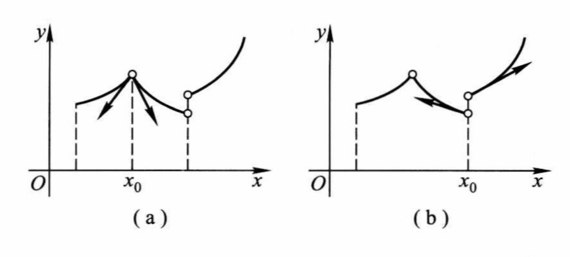


图 74

为了能在这种函数上应用所讲的理论, 我们引入一个辅助函数 $f^*(x)$ 来替代, 其定义如下. 在区间 $(-\pi,\pi]$ 内我们令 f^* 与 f 重合:

$$f^*(x)=f(x)\quad(-\pi<x\leqslant\pi),\tag{12}$$

然后令

$$f^*(-\pi)=f^*(\pi)=f(\pi),$$

并将函数 $f^*(x)$ 按周期性规律扩展到 x 的其余实数值上去.

对这样构成的一个周期为 2π 的函数 $f^*(x)$, 已经可以应用所证明的展开定理. 但如果所谈的点 x_0 严格地落在 $-\pi$ 与 π 之间, 则由 (12) 只需处理所给出的函数 $f(x)$. 按同样的理由展开式系数也就可以用公式 (1) 算出, 不必转化为函数 $f^*(x)$. 简而言之, 以上所证全部结果可直接搬到所给的函数 $f(x)$ 上来, 而没有用到辅助函数 $f^*(x)$.

但是要特别注意的是区间端点 $x=\pm\pi$. 比如说, 在点 $x=\pi$ 上应用 **402** 段的定理于函数 $f^*(x)$ 时, 则既须考虑辅助函数在 $x=\pi$ *左边*的值 (这里与所给函数相应值一致), 又须考虑 $f^*(x)$ 的在 $x=\pi$ *右边*之值 (这里已经与 $f(x)$ 在 $x=-\pi$ *右边*之值一致). 所以, 对于 $x=\pm\pi$ 应取作 S_0 的是

$$\begin{aligned}S_0=\frac{f^*(\pi+0)+f^*(\pi-0)}{2}&=\frac{f^*(-\pi+0)+f^*(-\pi-0)}{2}\\=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}&.\end{aligned}$$

如此, 即使所给函数 $f(x)$ 在 $x=\pm\pi$ 是连续的, 但倘若它没有周期 2π, 因而 $f(\pi)\neq f(-\pi)$, 则在满足逐段可微分的条件之下傅里叶级数之和将为

$$\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2},$$

既异于 $f(-\pi)$, 又异于 $f(\pi)$. 对这种函数展开式只能在开区间 $(-\pi,\pi)$ 内成立.

下面的话值得读者特别注意. 如果三角级数 (2) 在区间 $(-\pi,\pi]$ 内收敛于函数 $f(x)$, 则因其各项有周期 2π 故也处处都收敛, 而其和 $S(x)$ 也是 x 的周期函数, 其周期为 2π. 但此和在所说区间外面一般已与函数 $f(x)$ 未必一致 (即使它在全实数轴上都有定义). 以后将举例来说明这话.

最后指出, 区间 $[-\pi,\pi]$ 也可换成任何长 2π 的区间 $[\alpha,\alpha+2\pi]$.

404. 任意区间的情形 我们假设函数 $f(x)$ 给定在任意长 $2l$ 的区间 $[-l,l]$ 内并且在其内逐段可微分. 如果利用替换

$$x=\frac{ly}{\pi}\quad(-\pi\leqslant y\leqslant\pi),$$

则可得一在区间 $[-\pi,\pi]$ 内 y 的函数 $f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$, 也逐段可微分, 对此已可应用前段所论. 我们看出, 除间断点及区间端点 $-\pi,\pi$ 外, 它可展为傅里叶级数:

$$f\left(\frac{ly}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ny+b_n\sin ny),$$

其系数可用欧拉–傅里叶公式来决定:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\cos ny dy,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\sin ny dy.$$
$$(n=0,1,2,\cdots)\qquad\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

现在令

$$y=\frac{\pi x}{l},$$

而变回原先的变量 x, 于是我们得出所给函数 $f(x)$ 的这种形式略异的三角展开式:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).\tag{13}$$

这里余弦与正弦之角都是 $\frac{\pi x}{l}$ 的倍数而不是 x 的倍数. 决定这展开式系数的公式也可用同一替换变成:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.\tag{14}$$
$$(n=0,1,2,\cdots)\qquad\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

对区间的端点 $x=\pm l$, 前段关于点 $x=\pm\pi$ 所说的话也仍适用. 最后, 区间 $(-l,l]$ 也可换成任何别的同样长 $2l$ 的区间, 特别如, 区间 $(0,2l]$. 在这情形公式 (14) 变成

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.\tag{14a}$$
$$(n=0,1,2,\cdots)\qquad\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

405. 只含余弦或只含正弦的展开式 首先注意, 如果在区间 $[-\pi, \pi]$ 内给了一个奇函数 $f(x)$ (连续或逐段连续), 则

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

这不难证明, 只要将积分 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 表示为两个积分之和的形式: $\int_{0}^{\pi} + \int_{-\pi}^{0}$, 而在第二个积分中以 $-x$ 代 x 就行了. 同样可证, $f(x)$ 为偶函数时有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

现在设 $f(x)$ 是在区间 $[-\pi, \pi]$ 内逐段可微分的偶函数. 于是乘积 $f(x)\sin nx$ 成为奇函数, 而按上面说的有

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0.$$

如此, 偶函数的傅里叶级数只含余弦:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{15}$$

因为在这情形下 $f(x)\cos nx$ 也是偶函数, 所以应用上面说的第二点可以将展开式系数 a_n 写成:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{16}$$

如果 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)\cos nx$ 也是奇函数, 从而

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

我们得到结论: 奇函数的傅里叶级数只含正弦:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \tag{17}$$

在此由于乘积 $f(x)\sin nx$ 是偶函数, 可以写:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{18}$$

顺便指出, 每个给定在区间 $[-\pi, \pi]$ 内的函数 $f(x)$ 都可表示为一个偶函数与一个奇函数之和的形式:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

这里

$$f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

显然, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数正好就由函数 $f_1(x)$ 依余弦的展开式和函数 $f_2(x)$ 依正弦的展开式所组成.

其次, 我们假设函数 $f(x)$ 只在区间 $[0,\pi]$ 内给出. 要将它在这区间内展为级数 (2), 我们对区间 $[-\pi,0]$ 内 x 值任意补充这个函数的定义而保持其逐段可微分性, 然后应用 **403** 段所说的, 既然这函数的定义这样任意, 所以用这办法能得出种种不同的三角级数.

利用函数定义在区间 $[-\pi,0]$ 内的任意性, 可以使所得 $f(x)$ 的展开式只含余弦或只含正弦. 事实上, 设想对 $0<x\leqslant\pi$ 我们令

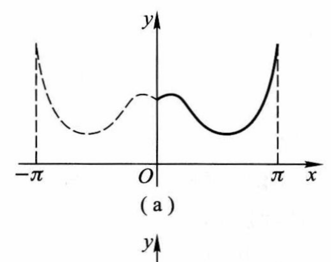
$$f(-x) = f(x), \tag{19}$$

如此结果得出一个区间 $[-\pi,\pi]$ 内的偶函数 (图 75a), 甚至还有周期 2π. 我们看到它的展开式只含余弦. 展开式的系数可按公式 (16) 来计算, 其中只含原先所给函数 $f(x)$ 之值.

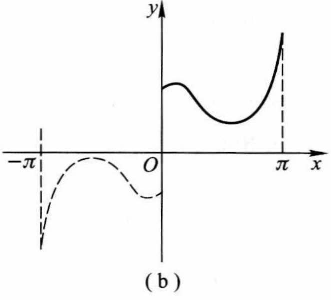
同样, 如果依条件 (对 $0<x\leqslant\pi$)

$$f(-x) = -f(x) \tag{20}$$

补充函数的定义而使它成为奇函数 (图 75b), 则在其展开式中将只出现正弦项. 其系数可用公式 (18) 来决定.



(a)



(b)

图 75

如此, 在区间 $[0,\pi]$ 内所给定的函数在满足某些条件时既能展为余弦的级数, 也能展为正弦的级数.

但需要特别研究的是点 $x=0$ 和 $x=\pi$. 这里两个展开式的情形是不同的. 为简单起见我们假设所给函数在 $x=0$ 及 $x=\pi$ 时连续而先来看依余弦的展开式. 条件 (19) 首先保持了 $x=0$ 时的连续性, 如此级数 (15) 在 $x=0$ 时就收敛于 $f(0)$. 其次, 既然

$$f(-\pi+0) = f(\pi-0) = f(\pi),$$

则在 $x=\pi$ 时有类似的情形.

依正弦的展开式情形就不同了. 现在不深论由于条件 (20) 而破坏了函数连续性等情况, 而只简单地指出, 在点 $x=0$ 及 $x=\pi$ 上级数 (17) 之和显然是 0. 所以显然只在 $f(0)$ 及 $f(\pi)$ 等于 0 的情形, 级数的和才能给出这些值.

如果函数 $f(x)$ 给定在区间 $[0,l]$ $(l>0)$ 内, 则用 **404** 段中同样的变量替换法可将展开 $f(x)$ 为余弦级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

或正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

的问题化为刚才所讨论的情形. 在此展开式系数可分别用公式

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{21}$$

或

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{22}$$

算出.

406. 例 下列各例中所举的函数都是可微分的或逐段可微分的. 所以展开为傅里叶级数的可能性是无可置疑的, 这一问题我们不再讨论.

1) 将函数

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$$

在区间 $(0,2\pi)$ 内展开.

按 **399** 段公式 (1a):

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{1}{2}x^2\right)\bigg|_0^{2\pi}=0,\\
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nxdx\\
&=\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{2\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nxdx=0 \quad (n=1,2,3,\cdots),\\
b_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nxdx\\
&=-\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{2\pi}-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nxdx=\frac{1}{n} \quad (n=1,2,3,\cdots).
\end{aligned}$$

如此, 我们得出这特别简单而只含正弦的展开式:

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \quad (0<x<2\pi).$$

在 $x=0$ (或 2π) 时级数之和等于 0 而等式不成立. 在该区间外等式也不成立. 该级数和 $S(x)$ 的图像 (图 76) 由无限多平行线段及 x 轴上一系列孤立点所组成.

2) 由 1) 中的展开式不必计算即可得出另一些有趣的展开式. 我们在其中以 $2x$ 代 x 而以 2 除等式两边, 得:

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k} \quad (0<x<\pi),$$

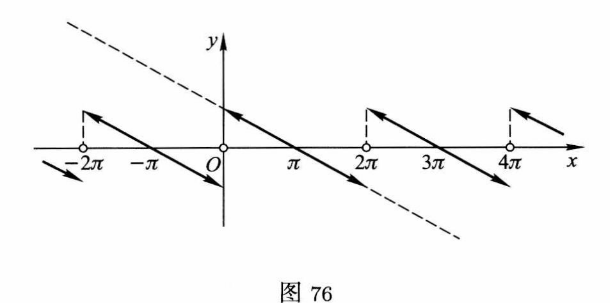


图 76

由原来的展开式减去这一展开式, 得

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\quad(0<x<\pi).$$

如果以 $S(x)$ 表示这个级数之和, 则 $S(0)=S(\pi)=0$. 改变 x 的正负号, 由正弦的奇性知在区间 $(-\pi,0)$ 内 $S(x)=-\frac{\pi}{4}$; 对其他 x 值则 $S(x)$ 可按周期性规律得出, 例如对区间 $(2\pi,3\pi)$ 又是 $S(x)=\frac{\pi}{4}$, 等等. 函数 $S(x)$ 的图像见图 77, 图 78 则表示级数的各个部分和逐步逼近于这不连续函数的情况.

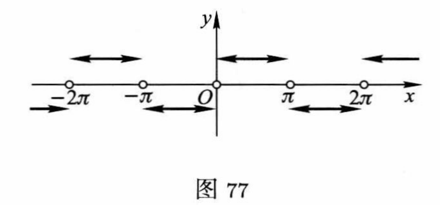


图 77

附注 如果在所讨论的展开式中令 $x=\frac{\pi}{2}$, 则得出我们所熟悉的莱布尼茨级数 [**255** 段, (20)]

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

将这里所得展开式与 1) 中展开式合起来不难得出函数 x 的级数:

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\quad(-\pi<x<\pi).$$

我们只对 $0<x<\pi$ 直接得出这个等式, 但它显然对 $x=0$ 也成立, 并且它的两边显然都表示奇函数, 所以这展开式对整个区间 $(-\pi,\pi)$ 都正确.

在 x 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时这级数和的图像不难表示为图 79. 图 80 则为这部分和

$$y=s_5(x)=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 5x}{5}\right)$$

的图像.

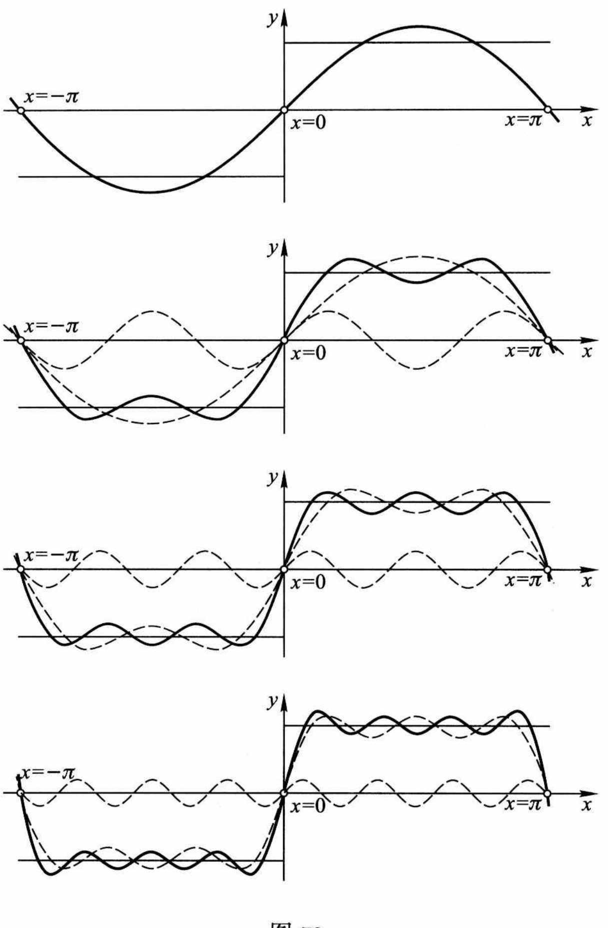


图 78

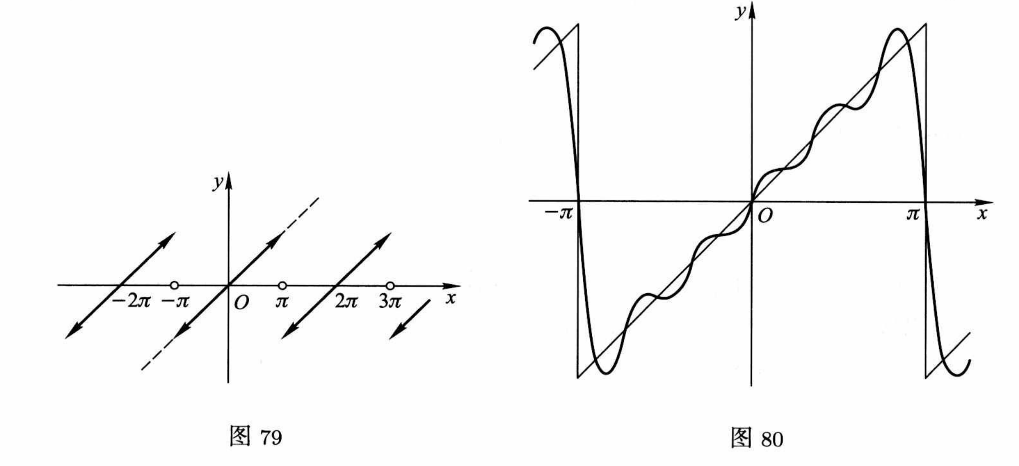


图 79　　　图 80

3)

(a) 将偶函数 $f_1(x) = \cos ax$ 在 $[-\pi, \pi]$ 内依余弦展开;

(b) 将奇函数 $f_2(x) = \sin ax$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内依正弦展开 (这里假设 a 不是整数).

(a) 我们有

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax dx = \frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(a+n)x + \cos(a-n)x] dx = (-1)^n \frac{2a}{a^2-n^2}\frac{\sin a\pi}{\pi} \quad (n > 0), \end{aligned}$$

如此

$$\frac{\pi}{2}\frac{\cos ax}{\sin a\pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{a\cos nx}{a^2-n^2} \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

(b) **答案**:

$$\frac{\pi}{2}\frac{\sin ax}{\sin a\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\sin nx}{a^2-n^2} \quad (-\pi < x < \pi).$$

附注 我们顺便指出, $x = 0$ 时由 (a) 可得出:

$$\frac{1}{\sin a\pi} = \frac{1}{a\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{a\pi}{(a\pi)^2 - (n\pi)^2}$$

或者令 $a\pi = z$ 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right] \end{aligned}$$

(这里 z 是任意的数, 只要不是 π 的倍数). 我们得出了函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的 "简分数展开式" (这在 **293** 段, 3° 及 **308** 段, 1° 中已用到过). 在 (a) 中令 $x = \pi$, 则可得出函数 $\cot z$ 的 "简分数展开式":

$$\begin{aligned} \cot z &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right]. \end{aligned}$$

4) 将函数

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}$$

在区间 $[0, \pi]$ 内依余弦展开.

不难用公式 (16) 算出:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}\right) dx = -\frac{\pi^2}{6},$$

并且还有 (做两次分部积分)

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)\cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^\pi - \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi (x-\pi)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{n^2\pi}(x-\pi)\cos nx\bigg|_0^\pi - \frac{1}{n^2\pi}\int_0^\pi \cos nx dx = \frac{1}{n^2} \quad (n=1,2,3,\cdots).
\end{aligned}
$$

依区间 $[0,\pi]$ 导出的展开式

$$\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},$$

事实上甚至在区间 $[0,2\pi]$ 内也成立, 因为等式两边在 x 代以 $2\pi - x$ 时其值不变.

附注 如果在此令 $x=0$, 则得著名的欧拉级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

407. 连续函数展开为三角多项式级数 在证明关于傅里叶级数展开式定理时 [**402** 段] 我们为简单起见是限于逐段可微分函数的. 事实上, 能这样展开的函数类, 其范围远比此要广, 但仍不能包括一切周期 2π 的连续函数! [参看 **424** 段]. 在某种意义上这里发生一个类似在 **278** 段讲过的函数的幂级数展开的情况. 并且除了那里所讲关于展开任意连续函数为代数多项式一致收敛级数的魏尔斯特拉斯定理外同一作者还证明了第二个关于展开周期 2π 的任意连续函数为三角多项式一致收敛级数的定理, 也即展为形如

$$A_0+\sum_{k=1}^{m}(A_k\cos kx+B_k\sin kx) \tag{23}$$

的和的定理. 如此, 和前面一样, 展开式应用范围的扩大是靠展开式项的性质的复杂化获得的: 由简单的单项式变到多项式之和.

第二魏尔斯特拉斯定理也和第一定理一样可用序列的语言陈述如下:

魏尔斯特拉斯定理 *如果函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 内连续并且有周期 2π:*

$$f(-\pi)=f(\pi),$$

则存在一个三角多项式序列, 它在这区间内一致收敛于 $f(x)$[①].

证明时我们先注意一个简单的事实, 两个 (23) 型三角多项式的乘积也能表示为三角多项式的形式. 这是因为, 按熟悉的三角公式, 所有可能的乘积

$$\cos kx\cdot\cos lx,\quad \cos kx\cdot\sin lx,\quad \sin kx\cdot\sin lx$$

都可表示为这种多项式的形式, 例如,

$$\cos kx\cdot\cos lx=\frac{1}{2}\cos(k+l)x+\frac{1}{2}\cos(k-l)x.$$

① 我们设想函数 $f(x)$ 周期性地扩展到全区间 $(-\infty,+\infty)$ 上.

如果我们能证明, 对任何一数 $\varepsilon > 0$ 必可找到这样一个三角多项式 $T(x)$, 使对所有 $[-\pi, \pi]$ 内的 x 有

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \tag{24}$$

则本定理就证明了.

这不难对偶函数 $f(x)$ 的情形来证明. 利用第一魏尔斯特拉斯定理 [**278** 段] 我们首先做出这样一个代数多项式 $P(t)$, 使对区间 $[-1, 1]$ 内所有 t 值有

$$|f(\arccos t) - P(t)| < \varepsilon^{①}.$$

这里令 $t = \cos x$, 而 $0 \leqslant x \leqslant \pi$, 我们对此全区间得出

$$|f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon.$$

由于函数 $f(x)$ 和 $\cos x$ 的偶性, 这不等式在 x 代以 $-x$ 时仍成立, 也即对区间 $[-\pi, \pi]$ 内所有 x 值都成立, 而由于周期性在全区间 $(-\infty, +\infty)$ 内也仍成立. 因为按开头时所说的, $P(\cos x)$ 一式可写成三角多项式的形式, 所以对所考虑的情形我们的论断已证明是对的.

现在来看一般的情形 —— 周期为 2π 的任意函数 $f(x)$. 对于偶函数

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \cdot \sin x,$$

按所证明的存在这样的多项式 $T_1(x)$ 和 $T_2(x)$, 使

$$|f_1(x) - T_1(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f_2(x) - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

由此有

$$|f_1 \sin^2 x - T_1 \cdot \sin^2 x| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f_2 \sin x - T_2 \cdot \sin x| < \frac{\varepsilon}{4},$$

然后, 将这些不等式加起来, 则有

$$|f(x) \cdot \sin^2 x - T_3(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{25}$$

这里 $T_3(x)$ 是三角多项式

$$T_3 = T_1 \cdot \sin^2 x + T_2 \cdot \sin x$$

(参看开头所说的简单事实).

同样对函数 $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 也可找到一个三角多项式 $T_4(x)$, 使得

$$\left|f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin^2 x - T_4(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

这里以 $x - \frac{\pi}{2}$ 代 x 并以 $T_5(x)$ 表示经过此代换后由 $T_4(x)$ 所得出的三角多项式, 我们得到

$$|f(x) \cdot \cos^2 x - T_5(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{26}$$

最后, 令 $T = T_3 + T_5$, 由 (25) 和 (26) 相加得出 (24). 如此本定理证明了.

这个定理也可用级数的语言陈述如下 [参看 **278** 段]:

一个以 2π 为周期的连续函数 $f(x)$ 可以展开成一个由三角多项式组成而一致收敛于它的级数.

① 回忆 $\arccos t$ 值充满区间 $[0, \pi]$.

§3. 傅里叶积分

408. 傅里叶积分作为傅里叶级数的极限情形 我们要在此重述一下傅里叶导出其积分公式时的想法要点, 这种想法虽欠严格, 而因其简洁值得加以注意①.

如果函数 $f(x)$ 给定在一个有限区间 $[-l,l]$ 内, 则在一定的条件之下 (我们在此不研究它们) 可将它在此区间内表示为三角级数:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos\frac{m\pi x}{l}+b_m\sin\frac{m\pi x}{l},$$

这里

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{m\pi u}{l}du,\quad b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\sin\frac{m\pi u}{l}du.$$
$$(m=0,1,2,\cdots)\qquad\qquad (m=1,2,3,\cdots)$$

[参看 **404** 段] 将系数 a_m 和 b_m 换成其表达式即可将级数写成:

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)du+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{m\pi}{l}(u-x)du.\tag{1}$$

现在设函数 $f(x)$ 在整个无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 内都有定义. 在这情形, 不论 x 如何, 相应的 $f(x)$ 值在任何 $l>|x|$ 之下恒可表示为展开式 (1). 这里我们取 $l\to+\infty$ 时的极限而设法建立此展开式的 “极限形式”.

关于等式 (1) 右边第一项自然可认为它趋于 0②. 至于右边的无穷级数部分, 则我们可将余弦号下系数 $\frac{m\pi}{l}$ 看作某一个由 $z_0=0$ 连续变至 $+\infty$ 的变量 z 的离散值

$$z_1=\frac{\pi}{l},\quad z_2=\frac{2\pi}{l},\quad\cdots,\quad z_m=\frac{m\pi}{l};$$

而增量

$$\Delta z_m=z_{m+1}-z_m=\frac{\pi}{l}$$

显然在 $l\to+\infty$ 时趋于 0. 在这种表示法之下我们的级数可写成:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\Delta z_{m-1}\int_{-l}^{l}f(u)\cos z_m(u-x)du.$$

它好像是区间 $[0,+\infty]$ 内 z 的函数

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)du$$

的积分和. 取 $l\to+\infty$ 时的极限, 即由级数得出一积分; 这样就得出下列傅里叶积分公式:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)du.$$

---

①柯西也独立地得出过这个公式.

②例如假设 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)du$ 收敛时这就成为明显的事情.

如将差角余弦展开这公式也可表示为:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(z)\cos zx + b(z)\sin zx]dz,$$

其中

$$a(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos zudu, \quad b(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin zudu.$$

这里可明白看出其与三角展开式的相似性: 只是将取正整数值的参变量 m 换成连续变化的参变量 z, 而无穷级数换成积分. 系数 $a(z)$ 和 $b(z)$ 在其结构上就像是傅里叶系数.

当然, 这些想法只是提示的性质; 傅里叶公式成立的实际条件还有待阐明. 而在作严密论证时我们仍将遵循有关傅里叶级数的基本论证步骤.

409. 预备说明 关于函数 $f(x)$ 我们现在假设: 1) 它在每一有限区间内都逐段连续并且 2) 在无限区间 $[-\infty, +\infty]$ 内绝对可积分. 在这样的假设之下我们来考虑积分

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^A dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u - x_0)du,$$

这里 A 是一个任意的有限正数, 而 x_0 是 x 的任何一个定值. 这个积分表现与傅里叶级数部分和相似: 由此取 $A \to +\infty$ 时的极限可得到傅里叶积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u - x_0)du. \tag{2}$$

对任何有限的 $B > 0$, 按 **298** 段, 定理 4° 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^A dz \int_{-B}^{B} f(u)\cos z(u - x_0)du &= \int_{-B}^{B} f(u)du \int_0^A \cos z(u - x_0)dz \\ &= \int_{-B}^{B} f(u)\frac{\sin A(u - x_0)}{u - x_0}du.\end{aligned} \tag{3}$$

如果函数 $f(u)$ 在区间 $[-B, B]$ 内连续, 则上式直接可由所说定理推出; 在相反的情形这定理需分别应用于该函数在上面连续的每个区间上.

但积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u - x_0)du \tag{4}$$

被这个假设为收敛的积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|du$$

所控制, 所以在 z 值的任何区间上对 z 一致收敛 (在 $u = +\infty$ 及 $u = -\infty$ 处). 如此, 积分

$$\int_{-B}^{B} f(u)\cos z(u - x_0)du$$

在 $B \to +\infty$ 时一致地趋于其极限 (4). 所以, 如果在等式 (3) 中取 $B \to +\infty$ 时的极限, 则在左边积分中可在积分号下取极限 [**296** 段, 定理 1].① 由此对 $J(A)$ 得出下列积分形式的表达式:

$$J[A] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{\sin A(u - x_0)}{u - x_0}du,$$

①参看 **305** 段, 定理 4, 其中被积函数假设是连续的. 这里我们不作这样的假设.

它与狄利克雷积分相像 [**399** 段] 并且事实上也恰恰起这样的作用. 由初等变换不难将它化为:

$$\begin{aligned} J(A) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+t)\frac{\sin At}{t}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}dt. \end{aligned} \tag{5}$$

为了以后的需要对 **400** 段基本引理作这一明显的补充:

如果函数 $g(t)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 的每一有限部分内都逐段连续并且在这无限区间内绝对可积分, 则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^{+\infty} g(t)\sin pt dt = 0$$

(同样也有

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^{+\infty} g(t)\cos pt dt = 0).$$

事实上, 指定任意一数 $\varepsilon>0$, 我们先选取一个这样大的 A, 使

$$\int_A^{+\infty} |g(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

因而更有

$$\left|\int_A^{+\infty} g(t)\sin pt dt\right| \leqslant \int_A^{+\infty} |g(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

并且不论 p 是怎样的数. 然后在积分

$$\int_a^A g(t)\sin pt dt$$

上直接应用 **400** 段的引理, 如此对充分大的 p 有

$$\left|\int_a^A g(t)\sin pt dt\right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

对同样那些 p 值显然有

$$\left|\int_a^{+\infty} g(t)\sin pt dt\right| < \varepsilon,$$

这就是所要证明的.

410. 用傅里叶积分表示函数 完全与 **402** 段的定理相似, 这里有

定理 *设函数 $f(x)$ 在 u 的每一有限区间内逐段可微分, 并且在区间 $[-\infty,+\infty]$ 内绝对可积. 于是在每一点 $x=x_0$ 上其傅里叶积分都收敛, 并且有值*

$$S_0 = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

(如果函数在点 $x=x_0$ 连续, 此值显然变成 $f(x_0)$).

证明 将等式

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin At}{t}dt \quad (A>0)$$

[参看 **293** 段, 附注; **308** 段, 2°] 两边乘以常数 S_0, 而由等式 (5) 两边减去它, 得

$$J(A)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)]\frac{\sin At}{t}dt. \tag{6}$$

取一常数 $h>0$ 而将此积分写成

$$\frac{1}{\pi}\int_0^h\left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}-\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}\right]\sin Atdt$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_h^{+\infty}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin Atdt-\frac{2S_0}{\pi}\int_h^{+\infty}\frac{\sin At}{t}dt.$$

第一个积分在 $A\to+\infty$ 时趋于 0, 这可以像证明 **402** 段的定理那样来证明. 第二积分中的分式, 连同 f, 在区间 $[h,+\infty]$ 的任何有限部分中都是逐段连续的函数; 此外这函数在该区间还绝对可积. 所以, 按前段末尾的话第二积分在 $A\to+\infty$ 时也有极限 0. 最后, 在第三积分中令 $At=z$ 而将它化为

$$-\frac{2S_0}{\pi}\int_{Ah}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz$$

的形状, 如此它在 $A\to+\infty$ 时也趋于 0. 由此我们可下结论说, (6) 式在 $A\to+\infty$ 时有极限 0, 即积分 (2) 存在且等于 S_0.

411. 傅里叶公式的种种形式 假设上面所说傅里叶公式成立的条件已经实现, 我们为简单起见将认为函数 $f(x)$ 在所考虑的点 x 上连续, 或者在不连续的情形则认为满足条件

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

于是在任何情形我们都有

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)du. \tag{7}$$

由于内层积分显然是 z 的偶函数, 这公式也可写成:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)du. \tag{8}$$

其次不难证明, 在 **410** 段所作关于函数 $f(x)$ 的一般假设之下积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin z(u-x)du \tag{9}$$

也存在. 这个积分还是 z 的连续函数并且显然是奇函数.

一般说来, 对这个函数已经不能保证由 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的反常积分存在.

在对任何函数 $\varphi(z)$ 由 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的积分也即 M 与 N 独立趋于无穷时的极限

$$\lim_{\substack{M\to+\infty\\N\to+\infty}}\int_{-M}^{N}\varphi(z)dz$$

不存在时, 也可以存在相应于特殊假设 $M=N$ 的极限. 这种极限按柯西的说法称为积分的主值并表示成 V. p. (Valeur principale):

$$\text{V. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)dz=\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M}\varphi(z)dz.$$

如果一个积分在反常积分定义之下存在则它显然与其主值一致.

由于函数 (9) 是 z 的奇函数, 我们有

$$\int_{-M}^{M} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin z(u-x)du = 0,$$

并且在 $M \to +\infty$ 时也得出极限为 0. 如此, 在任何情形

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin z(u-x)du = 0.$$

将此等式乘以 $\dfrac{i}{2\pi}$ 而与 (8) 相加, 即得关系式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{iz(u-x)}du, \tag{10}$$

这里外层积分理解为主值意义下的积分. 公式的这一形式是由柯西最先提出的.

回到公式 (7), 将它写成:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \cos zx dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos zu du \\ +\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \sin zx dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin zu du. \end{aligned}$$

如果 $f(u)$ 是偶函数, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos zu du = 2\int_{0}^{+\infty} f(u)\cos zu du, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin zu du = 0,$$

而我们得到一个只含余弦的简化公式:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \cos zx dz \int_{0}^{+\infty} f(u)\cos zu du. \tag{11}$$

同样, 在 $f(x)$ 是奇函数的情形我们可得到一个只含正弦的公式:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \sin zx dz \int_{0}^{+\infty} f(u)\sin zu du. \tag{12}$$

现在设函数 $f(x)$ 只在区间 $[0,+\infty]$ 内给出并且在这区间内满足类似以前面对全区间 $(-\infty,+\infty)$ 所设的条件. 于是, 将函数 $f(x)$ 用等式

$$f(-x) = f(x) \quad 或 \quad f(-x) = -f(x) \quad (x > 0)$$

开拓到区间 $(-\infty, 0)$ 上, 我们在第一情形得一个区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的偶函数, 在第二情形得一奇函数. 如此, 对 x 的正值我们既可利用公式 (11), 也可利用公式 (12).

如果在点 $x=0$ 假设函数 $f(x)$ 是连续的, 则公式 (11) 在这一点上可以应用, 因为函数的偶式开拓仍在此保持连续性. 公式 (11) 则一般在点 $x=0$ 上不能适用: 它只在 $f(0)$ 的值是 0 的情形才能给出此值.

这些想法完全与 **405** 段对傅里叶级数讲的相似.

412. 傅里叶变换 在我们的假设之下傅里叶公式 (10) 对区间 $(-\infty, +\infty)$ 内所有 x 值都成立. 这公式可以想象是下面两个公式叠加起来的:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{izu} du, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{-ixz} dz^{①}. \tag{13}$$

按第一公式与函数 $f(x)$ 对应的函数 $F(z)$, 称为其傅里叶变换. 按第二公式则函数 $f(x)$ 又称为函数 $F(x)$ 的**傅里叶** (逆) **变换** (区别在 i 处的正负号!). 注意一般说来, 即便 f 是实函数时, 函数 F 也是复函数; 但这里也可假设原函数 f 是复函数.

等式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{-ixz} dz,$$

其中 $f(x)$ 是给定的, 可以看作是对积分号下未知函数 $F(z)$ 的积分方程. 这个方程的解可由公式

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{izu} du$$

得到. 自然, 这两个等式也可调换次序.

现在回到公式 (11); 它对 x 的所有正值都成立, 并且可将它表示为下列两个公式的叠加 (这次两式均有实值且完全对称):

$$\left.\begin{aligned} F_c(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(u) \cos zu du, \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(z) \cos xz dz. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

同样公式 (12) 也可分解成两个:

$$\left.\begin{aligned} F_s(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(u) \sin zu du, \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(z) \sin xz dz. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

函数 $F_c(z)$ 和 $F_s(z)$ 分别称为函数 $f(x)$ 的傅里叶**余弦变换**和**正弦变换**. 我们看到, 函数 f 由 F_c (或 F_s) 得出的方式恰和 F_c (或 F_s) 由 f 得出的方式一样. 换句话说, 函数 f 与 $F_c(F_s)$ 互为余弦变换 (或正弦变换). 柯西将一对函数 f 与 F_c 或 f 与 F_s 分别称为第一类共轭函数或第二类共轭函数. 这里 (14) [或 (15)] 中的每个等式也是可看作一个积分方程, 其中积分外函数是给定的, 而积分号下的函数是所求的; 解由另一等式给出.

比较函数 F, F_c 和 F_s 我们可以说: 在 $f(x)$ 为偶函数时, 有

$$F(z) = F_c(z)$$

(函数 $F_c(z)$ 以偶的方式开拓到 $z < 0$ 的值上), 而在 $f(x)$ 为奇函数时:

$$F(z) = iF_s(z)$$

① 如果关于 $f(x)$ 只作上面所说的假设, 则后一积分理解为 "主值" 的意义.

(函数 $F_s(z)$ 以奇的方式开拓到 $z<0$ 的值上). 在一般情形则函数 $f(x)$ 可分解为偶函数与奇函数之和:

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

于是

$$F(z)=G_c(z)+iH_s(z)^{①}.$$

由于这种情况我们只要举余弦变换和正弦变换的例子就够了.

1) 设函数 $f(x)=e^{-ax}(a>0,x\geqslant 0)$; 于是其余弦变换为

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-az}\cos zxdz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2},$$

而正弦变换为

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-az}\sin zxdz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{a^2+x^2}.$$

因为 e^{-ax} 在区间 $[0,+\infty]$ 内可积分, 所以应成立下列相互关系:

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos zx}{a^2+z^2}dz=e^{-ax}\quad(x\geqslant 0),$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{z\sin zx}{a^2+z^2}dz=e^{-ax}\quad(x>0)$$

或

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xz}{a^2+z^2}dz=\frac{\pi}{2a}e^{-ax},\quad \int_0^{+\infty}\frac{z\sin xz}{a^2+z^2}dz=\frac{\pi}{2}e^{-ax}.$$

我们认得这些积分就是熟悉的*拉普拉斯积分* [**308** 段, 4°].

如此, 我们在这里有

$$e^{-ax},\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2}\quad 及\quad e^{-ax},\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{a^2+x^2},$$

这两对函数作为第一类及第二类*共轭函数* (按柯西的意义) 的例子. 如果我们不知道拉普拉斯积分, 则所讲的理论给出了计算它们的途径.

2) 现在来看这样一个函数, 以等式

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<a,\\ \dfrac{1}{2}, & x=a\quad(a>0),\\ 0, & x>a\end{cases}$$

为其定义. 在这情形

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a\cos zxdz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin ax}{x}.$$

要以这个例子来验证傅里叶公式, 我们找出所得函数的余弦变换:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin az}{z}\cos zxdz.$$

① $G_c(z)$ 表示函数 $g(x)$ 的余弦变换, $H_s(z)$ 表示 $h(x)$ 的正弦变换.

如果将此积分写成

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a+x)z}{z}dz+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a-x)z}{z}dz,$$

则立即可以看出 [**293**, 附注], 它的值事实上与原来的函数 $f(x)$ 一致.

§4. 三角函数系的封闭性与完备性

413. 函数的平均近似 · 傅里叶级数段的极值性质 如果对任何一个函数 $f(x)$ 我们取另一函数 $g(x)$ 作为它在区间 $[a,b]$ 内的近似式, 则这近似式的*精确度*可按不同方式进行估计. 自然应以差数

$$r(x)=f(x)-g(x)$$

作为考虑的基础.

如果我们对这两个函数在一切分别取来的点上的离差是同样关心的, 在这种情形可取其*最大离差*

$$\delta=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|r(x)|$$

作为近似性的测度.

但我们常常不考虑函数在一切点上的 "一致" 近似性而宁考虑其 "平均" 近似性. 在这情形则取其*平均离差*

$$\delta'=\frac{1}{b-a}\int_a^b|r(x)|dx$$

或*均方离差* (以后我们经常要用的)

$$\delta''=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b r^2(x)dx}$$

作为近似性测度. 但不用这个式子, 而改用下面较简单的量:

$$\Delta=\int_a^b r^2(x)dx=(b-a)\delta''^2$$

则更为方便.

重新回来考虑区间 $[a,b]$ 内一个任意的*正交函数系* $\{\varphi_m(x)\}$ $(m=0,1,2,\cdots)$ [**398** 段]. 设 $f(x)$ 是一个给定在同一区间内的函数① 而 n 是一个固定的正整数. 我们来考虑这样一个问题: *由最先 $n+1$ 个函数 φ 的所有线性组合*

$$\sigma_n(x)=C_0\varphi_0(x)+C_1\varphi_1(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x) \tag{1}$$

① 和寻常一样, 我们认为所有所考虑的函数以及 φ_m 和 f 都是连续的或者 (更一般地) 是逐段连续的.

中, 其中系数 $C_0, C_1, \cdots, C_n$ 是任意的, 试找出函数 $f(x)$ 的最佳近似式 (最佳是指均方根离差而言). 换句话说, 要使

$$\Delta_n = \int_a^b [f(x) - \sigma_n(x)]^2 dx$$

达最小值.

这里将 $\sigma_n(x)$ 换成其展开的表达式, 得

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{m=0}^{n} C_m \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx$$
$$+ \sum_{m=0}^{n} C_m^2 \int_a^b \varphi_m^2(x)dx + 2\sum_{k<m} C_k C_m \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_m(x)dx.$$

最后一个和, 因所设函数系正交而消失. 引入常数

$$\lambda_m = \int_a^b \varphi_m^2(x)dx$$

及函数 $f(x)$ 的 (广义) 傅里叶系数

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx,$$

可将 Δ_n 的表达式写成:

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{m=0}^{n} \lambda_m c_m C_m + \sum_{m=0}^{n} \lambda_m C_m^2,$$

加减 $\lambda_m C_m^2$ 使求和号下成完全平方, 终于得出:

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{m=0}^{n} \lambda_m c_m^2 + \sum_{m=0}^{n} \lambda_m (C_m - c_m)^2.$$

现在可以看出, 在最后一个和等于 0 时, 也就是

$$C_0 = c_0, \quad C_1 = c_1, \quad \cdots, \quad C_n = c_n$$

的时候, Δ_n 达到其最小值.

如此, 由所有像 (1) 式那样的多项式中正是 (广义) 傅里叶级数段

$$s_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)$$

使 Δ_n 达到其可能的最小值

$$\delta_n = \int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{m=0}^{n} \lambda_m c_m^2. \tag{2}$$

傅里叶系数又一次表现出这么引人注意的性质：它在某种意义上成为所有可能系数的"最佳"者！此外很值得指出的是，对固定 n 值是"最佳"的系数在 n 值更大时仍保持最佳的地位，只是再添加一些新的系数.

等式 (2) 叫做贝塞尔恒等式. 由此得出不等式

$$\sum_{m=0}^{n} \lambda_m c_m^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx$$

及 (取 $n \to \infty$ 时的极限)

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx. \tag{3}$$

这叫做贝塞尔不等式. 奇妙的是，(3) 式的级数总是收敛的，无论 $f(x)$ 是所考虑的这类函数中的哪一个.

δ_n 的大小随 n 的增大而递减，因为在它的表达式 (2) 添加了新的负项. n 越大，其和越"平均"趋近所考虑的函数 $f(x)$. 于是自然发生这样一个问题：能否凭 n 的增大得到任意小的均方离差，也即 $n \to \infty$ 时是否 δ_n 趋于 0?

如果这情况实现，我们就说 $s_n(x)$ 平均趋于 $f(x)$ (要注意完全不是指 $s_n(x)$ 在寻常意义下：对 $f(x)$ 的"按点"收敛). 由贝塞尔恒等式可以看出，$s_n(x)$ 的平均收敛于 $f(x)$ 就等价于成立这个等式 [参看 (3)]:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m^2 = \int_a^b f^2(x)dx. \tag{4}$$

这等式叫做封闭性方程. 如果它对每个连续函数 $f(x)$ 都实现，则函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 本身就称为封闭的.

414. 三角函数系的封闭性 现在我们特别应用以上讲的话于区间 $[0, 2\pi]$① 内的三角函数系:

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \cdots, \quad \cos mx, \quad \sin mx, \cdots. \tag{5}$$

在进行讨论时，这里用三角多项式

$$T_n(x) = A_0 + \sum_{m=1}^{n} (A_m \cos mx + B_m \sin mx) \tag{1a}$$

来代替和式 (1)，它们对函数 $f(x)$ 的"平均"近似性可由

$$\Delta_n = \int_0^{2\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx$$

①为方便起见以后总是以区间 $[0, 2\pi]$ 为依据.

来表征. 由一般论证推知, 在固定的 n 值之下由相应的傅里叶级数段

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

使得量 Δ_n 达到最小值.

最小值本身由等式

$$\begin{aligned}\delta_n &= \int_0^{2\pi}[f(x) - s_n(x)]^2 dx \\ &= \int_0^{2\pi} f^2(x)dx - \pi\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{n}(a_m^2 + b_m^2)\right\}\end{aligned} \tag{2a}$$

表出, 它就是函数系 (5) 的贝塞尔恒等式, 由它可和一般情形一样推出傅里叶系数平方所组成的级数的收敛性及贝塞尔不等式:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{n}(a_m^2 + b_m^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)dx. \tag{3a}$$

但对所考虑的具体三角函数系这个结果可以精确化而前段末尾所提问题可以完全解决. 即, 成立下面这个重要的

定理 无论 $f(x)$ 是区间 $[0, 2\pi]$ 内怎样的逐段连续函数, 对它恒有

$$\lim \delta_n = \lim \int_0^{2\pi}[f(x) - s_n(x)]^2 dx = 0,$$

从而 $s_n(x)$ "平均" 收敛于 $f(x)$.

换句话说, 对上述函数 $f(x)$ 恒成立**封闭性方程**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2 + b_m^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)dx^{①}. \tag{4a}$$

证明时我们将依方便而采用这两种等价的陈述法. 证明分成几步来讲.

1°. 首先建立一个辅助不等式. 我们取两个逐段连续的函数 $\overline{f}(x), \overline{\overline{f}}(x)$, 并且设 $f(x) = \overline{f}(x) \pm \overline{\overline{f}}(x)$. 以字母上短线表示相应于函数 $\overline{f}$ 和 $\overline{\overline{f}}$ 的量, 我们显然有

$$f - s_n = (\overline{f} - \overline{s}_n) \pm (\overline{\overline{f}} - \overline{\overline{s}}_n).$$

由初等不等式 $(a \pm b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$ 有

$$(f - s_n)^2 \leqslant 2[(\overline{f} - \overline{s}_n)^2 + (\overline{\overline{f}} - \overline{\overline{s}}_n)^2],$$

①虽然在 19 世纪初已经考虑到接近于这个关系的问题, 但其最早的严格证明似乎直到 1892 年才由 C. de la Valleé-Poussin 给出. 对正交函数系封闭性理论及其应用搞得最多的是俄罗斯数学家 B. A. Стеклов 院士 (1863—1926). "封闭性方程" 这个名称就出于他.

由此得

$$\int_0^{2\pi}(f-s_n)^2dx \leqslant 2\left\{\int_0^{2\pi}(\overline{f}-\overline{s}_n)^2dx+\int_0^{2\pi}(\overline{\overline{f}}-\overline{\overline{s}}_n)^2dx\right\}. \tag{6}$$

如果在 $n\to\infty$ 时右边两个积分都趋于 0, 则左边的积分也趋于 0. 换句话说: *如果封闭性方程对两函数 $\overline{f}$ 与 $\overline{\overline{f}}$ 分别成立, 则它对其和或差 $f=\overline{f}\pm\overline{\overline{f}}$ 也成立*. 这结果显然对随便多少个函数之和都成立.

2°. 现在我们来看这个只取两个值的简单函数 $f_\alpha(x)$:

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\alpha \text{ 时},\\ 0, & \text{在其他点上}.\end{cases}\quad(0<\alpha\leqslant 2\pi)$$

对这个函数不难直接验证封闭性方程成立, 只要根据下面已知的展开式 [参看 **406** 段,4) 及附注]:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-1}{n^2}.$$

事实上, 对我们的函数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha dx=\frac{\alpha}{\pi},\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha\cos nx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin n\alpha}{n},$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-\cos n\alpha}{n},$$

如此

$$\begin{aligned}&\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\\ &=\frac{\alpha^2}{2\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha+(1-\cos n\alpha)^2}{n^2}\\ &=\frac{\alpha^2}{2\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\alpha}{n^2}=\frac{\alpha^2}{2\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{\pi\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{4}\right]=\frac{\alpha}{\pi}\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f_\alpha(x)]^2dx.\end{aligned}$$

显然, 如将数值 1 换成任何其他常数值 c 时, 公式 (4a) 也仍成立.

3°. 设 $f_{\alpha\beta}(x)=f_\beta(x)-f_\alpha(x)$ $(0<\alpha<\beta\leqslant 2\pi)$; 因为对函数 f_α 和 f_β 封闭性方程成立, 所以由 1° 它对其差 $f_{\alpha\beta}$ 也成立 (此差在区间 $[\alpha,\beta]$ 内部取数值 1, 在区间外取数值 0); 并且这里数值 1 也可换成任何常数 c.

现在我们取一个任意的*逐段常数函数* $\overline{f}(x)$[①]. 因为它除有限多个点上的数值以外都可表示为若干个刚才所考虑类型的函数之和, 所以由 1° 知等式 (4a) 对它也成立.

---

①这就是说, 基本区间可分成有限多段, 在每段内部函数保持一常数值.

4°. 最后来看任意的逐段连续函数, 我们又可以 (除有限多个点上之值外) 将它看作若干函数 $f(x)$ 之和, 每个函数都在某区间 $[\alpha,\beta]$ 内连续 (这里 $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi$) 而在区间外则等于 0. 由 1° 要证明这定理只要对任何这一类型的函数证明封闭性方程成立就行了.

预先将不等式 (6) 作一些变换. 即, 由贝塞尔恒等式 (2a) —— 如果将它应用于函数 $\overline{\overline{f}}$ —— 显然有

$$\int_0^{2\pi}[\overline{\overline{f}}(x)-\overline{\overline{s}}_n(x)]^2dx\leqslant\int_0^{2\pi}[\overline{\overline{f}}(x)]^2dx.$$

所以不等式 (6) 如果写成这样时只会加强:

$$\int_0^{2\pi}[f(x)-s_n(x)]^2dx\leqslant 2\left\{\int_0^{2\pi}[\overline{f}(x)-\overline{s}_n(x)]^2+\int_0^{2\pi}[\overline{\overline{f}}(x)]^2dx\right\},\tag{7}$$

此时我们依前认为 $f=\overline{f}+\overline{\overline{f}}$.

回到上面说过的函数 f, 我们来证明对它可以做这样一个逐段常数函数 $\overline{f}$, 使在全基本区间 $[0,2\pi]$ 内有

$$|f(x)-\overline{f}(x)|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi}}.\tag{8}$$

事实上, 按康托尔定理的推论 [**75** 段], 区间 $[\alpha,\beta]$ 可分解为有限多段 $[\alpha_i,\beta_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 使每段中函数的摆幅小于 $\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{8\pi}}$. 现在令函数 $\overline{f}$ 在每个区间 $[\alpha_i,\beta_i)$ $(i<n)$ 内等于 $f(\alpha_i)$ 而在区间 $[\alpha_n,\beta_n]$ 内等于 $f(\alpha_n)$, 在区间 $[\alpha,\beta)$ 外则设 $\overline{f}=0$. 显然, 函数 $\overline{f}$ 就是所求的.

如果取 $\overline{\overline{f}}=f-\overline{f}$, 则由 (8) 有

$$|\overline{\overline{f}}|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi}},\quad \text{如此}\quad \int_0^{2\pi}[\overline{\overline{f}}(x)]^2dx<\frac{\varepsilon}{4}.$$

但由 3° 知不等式 (7) 右边第一个积分在 $n\to\infty$ 时趋于 0 并且对充分大的 n 值则小于 $\dfrac{\varepsilon}{4}$. 对这些 n 值有

$$\int_0^{2\pi}[f(x)-s_n(x)]^2dx<\varepsilon,$$

这就完成了证明.

特别地, 由此可推知, 三角函数系 (5) 在区间 $[0,2\pi]$ 内是封闭的.

415. 三角函数系的完备性 上面证明的一般定理有一系列推论, 也是颇有意义的.

由它可证明

定理 除去恒等于 0 的函数以外, 不存在这样的连续函数, 它在区间 $[0, 2\pi]$[①] 内正交于三角函数系 (5) 的所有函数

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \cdots, \quad \cos mx, \quad \sin mx, \cdots.$$

换句话说, 如果一个在区间 $[0, 2\pi]$ 内连续的函数 $f(x)$ 其傅里叶系数全等于 0, 则该函数也就恒等于 0.

事实上, 按封闭性方程对这种函数有

$$\int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx = 0.$$

因为这里被积函数是非负的, 所以对 $[0, 2\pi]$ 内所有的 X 更应恒有

$$\int_0^{X} [f(x)]^2 dx = 0.$$

依上限微分之, 并考虑到被积函数的连续性, 得 [**183** 段] 恒等式

$$f(x) \equiv 0.$$

定理中所说的三角函数系的性质就称为它的完备性: 这就是说, 三角函数系在连续函数类中是完备的.

其次, 如果两个连续函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 有相同的傅里叶系数, 则它们必须恒等, 因为此时其差 $f_2(x) - f_1(x)$ 的傅里叶系数都等于 0. 如此, 连续函数可由其傅里叶系数唯一地决定. 这只是三角函数系完备性的另一陈述法.

附注 一切上面说的话对任何在某区间 $[a, b]$ 内封闭的正交函数系 $\{\varphi_m(x)\}$ 也保持有效: 由封闭性方程可得出完备性, 等等.

416. 广义封闭性方程 设给了两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 在区间 $[0, 2\pi]$ 内连续或逐段连续; 于是 $f+g$ 和 $f-g$ 也是同样的函数. 如果分别以 a_m, b_m 和 α_m, β_m 表示函数 f 和 g 的傅里叶系数, 则函数 $f \pm g$ 的傅里叶系数显然是 $a_m \pm \alpha_m, b_m \pm \beta_m$.

分别应用封闭性方程于函数 $f+g$ 和 $f-g$, 得

$$\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [(a_m+\alpha_m)^2 + (b_m+\beta_m)^2] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f+g]^2 dx$$

和

$$\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [(a_m-\alpha_m)^2 + (b_m-\beta_m)^2] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f-g]^2 dx.$$

[①] 或在任何别的长 2π 的区间内.

如果将这两个等式两边相减, 则由恒等式

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

得出下面的广义封闭性方程

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\alpha_m+b_m\beta_m)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)g(x)dx. \tag{9}$$

方程 (4a) 可由此取 $g\equiv f$ 得出.

附注 在区间 $[a,b]$ 内任意正交函数系 $\{\varphi_m(x)\}$ 的一般情形, 如封闭性方程 (4) 对每个连续或逐段连续函数都成立, 则对两个这种函数也成立广义封闭性方程

$$\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m c_m\gamma_m=\int_a^b f(x)g(x)dx,$$

这里 c_m 和 γ_m 是函数 f 和 g 的广义傅里叶系数. 证明法完全与刚才一样.

417. 傅里叶级数的逐项积分 我们仍假设 $f(x)$ 是区间 $[0,2\pi]$ 内的逐段连续函数, 并设

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos mx+b_m\sin mx \tag{10}$$

是它的傅里叶级数.

此外我们再考虑一个函数 $g(x)$ (也是逐段连续的), 它的定义是这样的:

$$g(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant x_0 \text{ 时},\\ 0, & \text{在其他点上}.\end{cases}$$

其傅里叶系数为

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}dx,\quad \alpha_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\cos mx dx,$$
$$\beta_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\sin mx dx\quad (m=1,2,3,\cdots).$$

如果对这些函数应用广义封闭性方程 (9), 则得

$$\int_0^{x_0}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{x_0}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)dx=\int_0^{x_0}f(x)dx. \tag{11}$$

如此, 函数 $f(x)$ 的积分可由其相应傅里叶级数逐项积分而得. 这里奇妙的是, 我们已经证明, 即使不假设级数 (10) 本身收敛于函数 $f(x)$, 傅里叶级数也总是可以逐项积分的![①]

① 最先试图证明傅里叶级数容许逐项积分的是罗巴切夫斯基 (1834 年).

甚至还可以指出: 在公式 (9) 里将函数 g 的傅里叶系数 α_m, β_m 换成其已知表达式

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos mx dx, \quad \beta_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin mx dx,$$
$$(m = 0, 1, 2, \cdots) \qquad\qquad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

就将它化为等价的形式:

$$\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} g(x)dx + \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}(a_m \cos mx + b_m \sin mx)g(x)dx$$
$$= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

这个等式可以这样解释: *函数 $f(x)$ 的傅里叶级数 (10) 甚至在各项乘以函数 $g(x)$ 后仍可逐项积分* —— 其和即函数 f 与 g 之乘积的积分. 这里积分是对区间 $[0, 2\pi]$ 而言. 如果我们感兴趣的是任何别的区间 $[0, x_0]$ $(0 < x_0 < 2\pi)$, 则只需在此区间外令 $g(x) = 0$.

418. 几何的解释 我们要对读者介绍一种完全新的观点来看本节所讲过的东西. 现在只考虑某有限区间 $[a, b]$ 内的连续函数 $f(x)$ 并取任一封闭 [**413** 段] 正交函数系 $\{\varphi_m(x)\}$ (也都是连续函数) 作基础; 为简单起见甚至假设这函数系是正规的, 如此有

$$\int_a^b [\varphi_m(x)]^2 dx = 1 \quad (m = 0, 1, 2, \cdots). \tag{12}$$

例如, 读者不妨设想所谈的是*正规三角函数系*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \quad \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}, \cdots,$$

其定义区间是 $[0, 2\pi]$ 或 $[-\pi, \pi]$ [参看 **398** 段, (17*)].

我们把所有函数 $f(x)$ *看作某"向量空间"的元素* $\overrightarrow{f}$, 而将两个这种元素的相加及一个元素的乘以一个数量 c 自然地定义为

$$\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g} = f(x) + g(x), \quad c\overrightarrow{f} = xf(x).$$

"向量" $\overrightarrow{f} = f(x)$ 的*长* (常常称为其模) 则理解为非负的数

$$\|\overrightarrow{f}\| = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}. \tag{13}$$

这个长显然*只有*函数 $f(x)$ 恒等于 0 时才等于 0; 相应的 "向量" 就是我们这空间的 "零矢量".

要验证"长"这个名称是合理的, 须检查其是否满足所谓"三角形公理"[参看 **125** 段, (2)]

$$\|\vec{f}+\vec{g}\| \leqslant \|\vec{f}\|+\|\vec{g}\|,$$

也即不等式

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx} \leqslant \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}+\sqrt{\int_a^b [g(x)]^2 dx}.$$

两边平方起来则化为

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}\cdot\sqrt{\int_a^b [g(x)]^2 dx} \tag{14}$$

或

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 dx\cdot\int_a^b [g(x)]^2 dx.$$

这就是布尼亚科夫斯基不等式[①], 它可算是我们已碰到过的柯西代数不等式

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}$$

的积分类比 [参看 **125** 段及该段第 3 个脚注]. 布尼亚科夫斯基不等式可与柯西不等式一样证明: 变量 z 的二次三项式

$$\begin{aligned}&\int_a^b [zf(x)+g(x)]^2 dx\\ &= z^2\int_a^b [f(x)]^2 dx+2z\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b [g(x)]^2 dx\end{aligned}$$

不取负值, 所以

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx\cdot\int_a^b [g(x)]^2 dx-\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \geqslant 0,$$

等等.

建立一个"向量" $\vec{f}$ 与 $\vec{g}$ 间的"角"的概念: $\theta=\measuredangle(\vec{f},\vec{g})$, 对于我们是方便的, 这个角以下列等式作为定义:

$$\cos\theta=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}\cdot\sqrt{\int_a^b [g(x)]^2 dx}}; \tag{15}$$

---

① В. Я. Буняковский (1804—1889) 院士是俄罗斯数学家. 他这不等式发表于 1859 年. 通常误称为 Schwartz 不等式, 其实 Schwartz 的著作中到 1884 年才出现此式.

由不等式 (14) 知此式右边绝对值不会超过 1. 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的 "正交" [**398** 段]:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

即等价于 $\cos\theta = 0$, 如此角 θ 成直角.

按模的定义 [参看 (13)] 我们由 (15) 得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \|\overrightarrow{f}\| \cdot \|\overrightarrow{g}\| \cdot \cos\theta;$$

因此有理由将左边的积分看作 "向量" $\overrightarrow{f}$ 与 $\overrightarrow{g}$ 的数积:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g}.$$

如果向量 $\overrightarrow{g}$ 是 "单位向量", 即其模 $\|\overrightarrow{g}\| = 1$, 则数积

$$\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g} = \|\overrightarrow{f}\| \cdot \cos\theta$$

可看作 "向量" $\overrightarrow{f}$ 在此单位向量上的射影:

$$\underset{\overrightarrow{g}}{\text{пр}}.\ \overrightarrow{f}.$$

如果给了一个 "向量" 序列 $\{\overrightarrow{f}_n\}$, 则其极限就是指这样一个 "向量" $\overrightarrow{f}$, 对于它

$$\text{在 } n \to \infty \text{ 时} \quad \|\overrightarrow{f}_n - \overrightarrow{f}\| \to 0.$$

回到相应的函数 $\{f_n(x)\}, f(x)$, 我们按模的定义 [参看 (13)] 有

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx \to 0,$$

如此"向量" 序列 $\{\overrightarrow{f}_n\}$ 的收敛于极限向量 f 无非就表示函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的平均收敛于极限函数 $f(x)$ [**413** 段].

现在回到所设的正交而且正规的 [参看 (12)] 函数系 $\{\varphi_m(x)\}$ 上来. 它可解释为一组相互垂直的 "单位向量" $\{\overrightarrow{\varphi}_m\}$. 既然这函数系按假设是封闭的, 则它也是完备的 [**415** 段, 附注], 而这就表示, 在这基本单位向量系 $\{\overrightarrow{\varphi}_m\}$ 里不能再添加任何新的单位向量使与所有 $\overrightarrow{\varphi}_m$ 都正交了.

我们来考虑任何 "向量" $\overrightarrow{f}$ 在某基本 "单位向量" $\overrightarrow{\varphi}_m$ 上的射影:

$$c_m = \underset{\overrightarrow{\varphi}_m}{\text{пр}}.\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{\varphi}_m = \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx.$$

我们认得这就是函数 $f(x)$ 的广义傅里叶系数之一[①]. 因为函数 $f(x)$ 由其傅里叶系数唯一地决定 [**415** 段, 附注] 所以 "向量" $\overrightarrow{f}$ 也就由其在基本系 $\{\overrightarrow{\varphi}_m\}$ 的 "诸单位向量" 上的射影唯一地决定.

乘积 $c_m \cdot \varphi_m(x)$, 即向量 $c_m\overrightarrow{\varphi}_m = \overrightarrow{f}_m$, 自然可称为 "向量" $\overrightarrow{f}$ 沿 "单位向量" $\overrightarrow{\varphi}_m$ 方向的分量.

现在我们怎样解释函数 $f(x)$ 的广义傅里叶级数 [**398** 段]

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x) + \cdots \tag{16}$$

呢?

首先我们看出, 由于函数系 $\{\varphi_m(x)\}$ 假设是封闭的, 故级数 (16) 的部分和 $s_n(x)$ 在 $n \to \infty$ 时平均收敛于函数 $f(x)$ [**413** 段], 而这就表示, 如果收敛性理解为平均收敛则展为傅里叶级数总是可能的. 换句话说, "向量" $\overrightarrow{s}_n$ 趋于极限 "向量" $\overrightarrow{f}$, 这可写成如下展开式的形式:

$$\overrightarrow{f} = c_0\overrightarrow{\varphi}_0 + c_1\overrightarrow{\varphi}_1 + \cdots + c_m\overrightarrow{\varphi}_m + \cdots = \overrightarrow{f}_0 + \overrightarrow{f}_1 + \cdots + \overrightarrow{f}_m + \cdots,$$

即每个向量 $\overrightarrow{f}$ 都可表示为其所有沿单位 "向量" 方向的分量之和. 这就是傅里叶级数展开式的几何意义!

封闭性方程 [**413** 段] 由于 (12) 可写成:

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^2$$

或

$$\|\overrightarrow{f}\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \|\overrightarrow{f}_m\|^2.$$

"向量" 长的平方等于其所有分量长平方之和. 这就是毕达哥拉斯定理的自然推广 (相应于平面上 "一矢量分解为两个互相垂直的分量").

再来看下面的广义封闭性方程 [**416** 段, 附注]

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\gamma_m,$$

这里 c_m 是函数 f 的傅里叶系数, 而 γ_m 是函数 g 的傅里叶级数. 如果将它写成:

$$\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\gamma_m,$$

则可以看出它与寻常三维空间中两向量数量积表示为三个相互垂直轴上射影的表达式相似 [**388** 段, (1)].

[①] 记得函数 $\{\varphi_m(x)\}$ 是正规的, 如此所有 $\lambda_m = 1$ [参看 (12)].

要揭示所考虑这种函数“空间”与寻常欧氏空间的更深入的相似性, 我们第一须将所考虑函数类扩充, 第二须将所用积分定义推广. 这些以后将在所谓实变函数论中讲 [参看附录第四部分].

附注 与所有连续函数的集合 $\{f\}$ 的向量解释平行, 也可考虑其点的解释, 而将各连续函数 $f=f(x)$ 看作其所组成空间中的点. 在这情形宜以如下方式引入两个“点” $f=f(x)$ 与 $g=g(x)$ 间的距离 $\rho(f,g)$:

$$\rho(f,g)=\|\overrightarrow{f}-\overrightarrow{g}\|=\sqrt{\int_a^b[f(x)-g(x)]^2dx}.$$

前面所谓“向量” $\overrightarrow{f}$ 的长无非就是“点” f 与“原点” O 的距离.

如果 f,g,h 是我们这“空间”中的三个“点”, 则“三角形公理”成立而取如下的形式:

$$\rho(f,h)\leqslant\rho(f,g)+\rho(g,h).$$

这形式可由前面的公式中以 $\overrightarrow{f}-\overrightarrow{g}$ 代 $\overrightarrow{f}$ 以 $\overrightarrow{g}-\overrightarrow{h}$ 代 $\overrightarrow{g}$ 得出.

§5. 三角级数简史

419. 弦振动问题 这个著名问题吸引了 18 世纪许多杰出数学家的注意, 对于任意函数能否展为三角级数这个问题的提出起了重要的作用. 所以我们首先给读者介绍这个问题及其解答.

设有一条均匀的弦, 其长为 l, 两端固定于 x 轴上点 $x=0$ 及 $x=l$ 处, 并且在某张力作用之下沿此轴处于平衡状态 (图 81). 设想在时刻 $t=0$ 该弦在 xy 平面中 (比如说这平面是铅直的) 从平衡位置移开然后听其自然①. 于是弦上的点开始在该铅直平面中振动. 如果假设弦上每点 M (其横坐标为 x) 严格沿铅垂方向振动, 则其在时刻 $t\geqslant 0$ 的位置可由其纵坐标 y 来决定, 它表示该点对平衡位置的离差. 这纵坐标是两个变量 x 和 t 的函数:

$$y=y(x,t), \tag{1}$$

它有待决定.

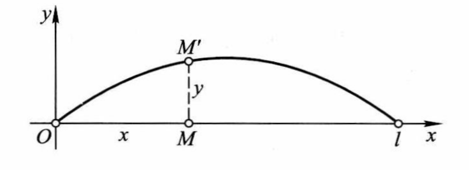


图 81

在某些 (使问题简化的) 假设之下, 该现象可由下列偏微分方程来描述:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{2}$$

① 为确定起见我们只假设振动是由静止状态开始的. 欧拉的解就是依据这个假设 (参看下段).

这里 a 是一个常数, 取决于弦的物理性质.

除去这个方程以外, 所求的函数 $y(x,t)$ 还须满足几个别的条件. 首先是, 要满足所谓边界条件:

$$y(0,t)=0, \quad y(l,t)=0 \quad (t \geqslant 0), \tag{3}$$

它表示弦两端固定这一事实. 然后, 如果在初始时刻 $t=0$ 弦上点的离差由函数 $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ 所表示而速度等于 0[①], 则还要求满足下面的初始条件:

$$y(x,0)=f(x), \quad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{4}$$

如此, 终于将问题归结为求这样一个函数 $y(x,t)$, 它对 $0 \leqslant x \leqslant l$ 以及 $t \geqslant 0$ 满足方程 (2) 以及条件 (3) 和 (4).

附注 既然在 $t=0$ 时化为 $f(x)$ 的函数 $y(x,t)$ 应满足方程 (2) 及条件 (3), 特别是在初始时刻, 则函数 $f(x)$ 本身必须假设在区间 $[0,l]$ 内可微分两次, 并且还要满足条件

$$f(0)=0, \quad f(l)=0, \tag{5a}$$

$$f''(0)=0, \quad f''(l)=0. \tag{5b}$$

420. 达朗贝尔及欧拉的解法 这两位学者最先明白地列出方程 (2). 它的通解两人都表示为如下的形式 [达朗贝尔在先 (1747 年), 欧拉在后 (1748 年)]:

$$y=\varphi(x+at)+\psi(x-at). \tag{6}$$

这里 $\varphi(u)$ 和 $\psi(v)$ 表示对所有自变量值给出的 "任意" 函数. 为了我们的目的只需要直接验证 (6) 式在 x 和 t 的一切值之下都满足条件 (2), 而不论 φ 和 ψ 是怎样的可微分两次的函数.

现在发生这样一个问题: 如何选择这些函数, 使边界条件及初始条件也满足, 即使 [参看 (3)]

$$\varphi(at)+\psi(-at)=0, \quad \varphi(l+at)+\psi(l-at)=0 \quad (t \geqslant 0), \tag{3a}$$

并且使 [参看 (4)]

$$\varphi(x)+\psi(x)=f(x), \quad \varphi'(x)-\psi'(x)=0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{4a}$$

在此显然函数 $\varphi(u)$ 只要对 $u \geqslant 0$ 来决定, 而函数 $\psi(v)$ 对 $v \leqslant l$ 来决定.

首先, 将等式 (4a) 第二式积分, 得

$$\varphi(x)=\psi(x)^{②} \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

于是, 由其第一式知两函数都等于 $\frac{1}{2}f(x)$: 如此, 在区间 $[0,l]$ 内它们已经决定了 (其图像见图 82 所表示曲线 OMA). 因为函数 φ 只在区间 $(l,+\infty)$ 内还有待决定, 而函数 ψ 只在与它不交叠的区间 $(-\infty,0)$ 内还有待决定, 所以为写起来简单一点可将函数符号 ψ 换成 φ 并在这些区间内由

①见上一个脚注.

②可以不写积分常数 C 也不失一般性, 因为由 φ 减去 $\frac{1}{2}C$ 而在 ψ 上加 $\frac{1}{2}C$ 后该等式总可实现.

条件 [参看 (3a)]

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)+\varphi(-x)=0,\\ \varphi(l+x)+\varphi(l-x)=0\end{aligned}\right.(x\geqslant 0)\qquad\begin{aligned}(7)\\(8)\end{aligned}$$

出发来决定函数 $\varphi(x)$.

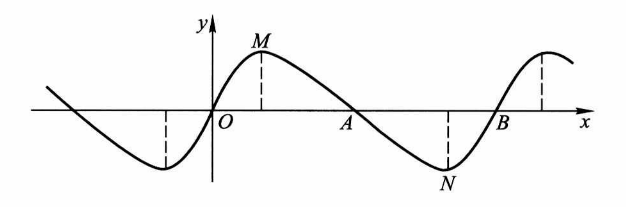


图 82

首先在 (8) 中令 x 由 0 变至 l, 我们就能在区间 $(l, 2l]$ 内决定 φ:

$$\varphi(l+x)=-\varphi(l-x)=-\frac{1}{2}f(l-x)$$

(图 82 上曲线 ANB). 现在, 函数 φ 在区间 $[0, 2l]$ 内已经完全确定, 由 (5a) 又有

$$\varphi(0)=\varphi(2l)=0.$$

我们来证明它一般有周期 $2l$, 因此在整个区间 $(-\infty, +\infty)$ 内也都已经决定了.

先设 $\xi \geqslant -l$; 在 (8) 中令 $x=\xi+l$, 于是由 (7) 得

$$\varphi(\xi+2l)=-\varphi(-\xi)=\varphi(\xi).$$

同样, 当 $\xi<-l$ 时在 (8) 中取 $x=-(\xi+l)$, 再依据 (7), 仍得出同样结果. 一般地, 可按欧拉表达式得出函数 φ 的图像为一 “蜿蜒曲线” 如图 82. 它应该对称于原点, 因为由 (7) 知 $\varphi(x)$ 是奇函数.

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0, l]$ 内有两个导函数并且还满足条件 (5a) 和 (5b), 所以可证明按上述方式决定的函数 $\varphi(x)$ 是处处二次可微分的, 包括粘接各段曲线之点 kl $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 在内. 所求之解可用这个函数表示为

$$y=\varphi(x+at)+\varphi(x-at) \tag{9}$$

的形式.

421. 泰勒及丹尼尔 · 伯努利的解法[①] 尚在 1713 年泰勒研究过拉紧的弦的运动问题并且决定了其振动周期. 他的出发点是一个实质上与方程 (2) 等价的命题. 结果他得出这样一个推论: *如果弦整个振动*, 则它在每时刻有正弦曲线弧的形状.

当然, 这只是弦的可能振动形式之一. 由泰勒的论证可推知存在无数多这种形式: 只要将弦分为 n 等份 $(n \geqslant 2)$, 在每部分中分别应用前面的结论就行了. 在这情形弦的形状是 n 个相继的正弦曲线弧.

①Daniel Bernoulli (1700—1782) 是 Johann Bernoulli 的儿子, 并且是 Euler 的朋友. 1725 年至 1733 年在彼得堡科学院活跃地工作.

我们将用纯分析的方法得出方程 (2) 所有这些特解, 并且直接由方程出发. 设所求的解 (异于我们所不感兴趣的明显解零), 可表示为两函数之积的形式, 其中一个只含 x 而另一个只含 t:

$$y = X(x) \cdot T(t).$$

方程 (2) 在这情形成为

$$XT'' = a^2 X'' T$$

(这里带撇的字母表示对函数所依赖的变量的导数) 或最后成为

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X}. \tag{10}$$

因为这等式左边与 x 无关, 而右边与 t 无关, 所以其共同值事实上既与 x 无关, 也与 t 无关, 即归结为一常数, 我们设它取 $-a^2\lambda^2$ 的形式 ($\lambda > 0$). 于是方程 (10) 拆成两个:

$$T'' + a^2\lambda^2 T = 0, \quad X'' + \lambda^2 X = 0;$$

这两个常微分方程的通解分别有下列形状:

$$T = A\cos a\lambda t + B\sin a\lambda t,$$
$$X = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x.$$

要函数 $y = XT$ 也满足边界条件 (3), 则函数 X 应满足该条件. 令其中 $x = 0$, 立即看出 $C = 0$; 令 $x = l$ 并考虑到 D 已不能为 0, 则得条件

$$\sin\lambda l = 0,$$

由此有 $\lambda l = n\pi$, 而 n 为正整数. 如此, λ 只能有下列诸值之一:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi}{l}, \cdots, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \cdots ^{①}.$$

如果认为弦上所有点的初速都等于 0, 则 $T'(0) = 0$, 由此 $B = 0$. 在 $\lambda = \lambda_n$ 时以 b_n 表示常数 AD, 我们得方程 (2) 的上述那一系列特解:

$$y_n = b_n \cos\frac{n\pi a}{l}t \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

如果弦是按这样的规律振动的, 则所有它的点都按同一周期

$$T_n = \frac{2l}{na}$$

而振动, 这周期相应于某一定高度的音. 每点振动的振幅则取决于其位置而等于

$$\left|b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right|.$$

全弦可分为 n 个相等的段, 而一段中的点全处于同一相位, 相邻两段则处于相反的相位. 对 $n = 1, 2, 3, 4$ 等情形弦的位置逐一表出如图 83.

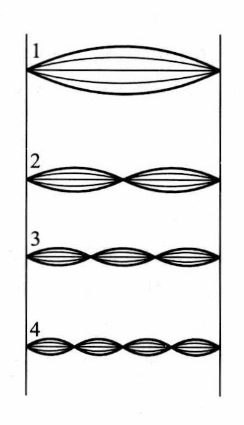


图 83

① 如果我们将关系式 (10) 的常数值取成 $a^2\lambda^2$ 的形式, 则能满足端点条件的只有一个恒等于 0 的函数 X.

分隔两段之点处于静止状态, 这就是所谓 "波的" 节点. 一段的中点 —— 所谓 "波腹" —— 以最大振幅而振动.

在达朗贝尔和欧拉关于弦振动问题的一般研究后跟着出现了丹尼尔 · 伯努利 (1753 年) 关于同一题目的论著. 伯努利注意到弦振动形式之繁多是泰勒已经知道的, 根据物理观察提出了这个论断: *所有这些振动同时实现, 因而弦同时发出各种高度的音*. 按他的说法, 发生了各种振动的所谓 "混合" (按我们的说法是 "叠加"), 如此弦的全振动可由等式

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi a}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{11}$$

来描述. *基音*由第一成分 y_1 决定; 它的相应周期是 $T_1 = \dfrac{2l}{a}$. 弦所能发出的其他的音, 或称*泛音*, 可由其他成分决定. 它们的相应周期是 $T_2 = \dfrac{1}{2}T_1, T_3 = \dfrac{1}{3}T_1, \cdots$. 如果用手指按住弦的中心, 则基音和奇泛音立即消失, 因为对于这些音, 这里恰好是波腹. 在弦中心有波节的偶泛音则完全保持不变. 对于偶泛音来说第二泛音就处于基音的地位, 而弦就发出比原来高*一倍的音*. 正是物理内容的丰富 —— 而又完全符合实验 —— 迫使伯努利宁取解 (11) 而不取欧拉解 (9). 应该说, 欧拉自己也提到解 (11), 但只作为可能的特解. 对于伯努利来说 —— 他自己*承认* —— 他的解的一般性问题当时是不清楚的, 但他并不认为其他的解 (如果存在的话) 究竟能有怎样 (物理的) 意义.

现在我们依据上面所讲理论来证明, *公式 (11) 在系数的适当选择之下*[①]*与公式 (9) 完全等同*. 当然, 在此我们假设以前对 $f(x)$ 所加的那些条件 [**419** 段, 附注] 是满足的.

我们就由系数 b_n 的选择开始. 如果我们要使公式 (11) 给出满足初始条件 (4):

$$y(x, 0) = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

的解, 则在 (11) 中令 $x = 0$ 而应有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{12}$$

因为函数 $f(x)$ 可微分并且在区间 $[0, l]$ 两端化为 0, 所以只要取 [参看 **405** 段, (22)]

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

展开式 (12) 就在全区间上都成立, 这就是所要证明的.

但级数 (12) 对*一切* x 值都成立, 并且在 $-\infty$ 至 $+\infty$ 全区间上可用它定义一个函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

如此, 在区间 $[0, l]$ 内这个函数等于 $\dfrac{1}{2} f(x)$; 此外, 不难直接验证, 对于它条件 (7) 和 (8) 都满足. 由此已可推知, 它恰好与前段讲的那个函数 φ 一致, 因为所有上述条件, 加在一起, 可将它唯一地确定.

---

① 伯努利未涉及系数问题.

现在我们可以将已经知道的欧拉解 (9) 表示为:

$$y=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left[\sin\frac{n\pi(x+at)}{l}+\sin\frac{n\pi(x-at)}{l}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

如此展开式 (11) 在上述系数选择法之下事实上给出方程 (2) 的解, 并且与以前的解完全一样.

422. 关于弦振动问题的争论 这场争论沿着两个方向展开.

首先是, 尽管达朗贝尔和欧拉所提出的解形式上相似, 但不久就看出来, 两位学者在下列问题上意见极为分歧: *在分析中容许考虑什么样的函数?* 特别是, 表示弦的初始形状的函数 f 应该是怎样的函数?

欧拉不要求, 这函数在整个区间 $[0,l]$ 内以统一的分析式子来定义 (这类函数欧拉称为 "连续的"). 它可以是 "混合的", 即在区间的不同部分以不同的式子给出. 欧拉认为甚至可能直接用 "信手画来的曲线" 来决定弦的初始位置: 因为在这情形可按他所指出的方法作出函数 φ 的图像 (图 82), 而由此图像已不难依几何方式确定任何时刻弦的形状.

达朗贝尔的见解则不然: 依他看来, 不管是出发的函数 $f(x)$, 还是那在无穷区间里能按它决定的函数 $\varphi(x)$, 都应该遵循统一的分析规律. 问题的分析解法只有当 "振动弦的种种位置可以概括于同一方程" 时才是可能的. 后来达朗贝尔集中其反对意见于曲率问题, 这个曲率应该在所有点上都是确定的, 因为在方程本身里出现第二阶导数 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; 然而当 f 任意给出并且 φ 的图像由一些片段 "黏合" 起来时就不保证其存在了.

如果要求方程 (2) 成立, 则最后这种想法不能认为没有一点说服力 [参看我们前面在函数 f 所加那些限制 (**419**, 附注)].

关于 "任意的函数" —— 它们最先在解*偏微分方程*时出现 —— 的性质的问题①在数学家中长久地引起了争论. 1787 年 —— 两位学者均已去世 —— 彼得堡科学院还为这争论问题设置奖金, 于 1790 年授予路易 · 阿尔波格, 其观点与欧拉接近.

现在转到第二个争论问题, 其基本内容与本简史有直接联系. 这回欧拉和达朗贝尔在同一方面, 两人都反对伯努利, 认为他的解不是一般的, 因为它远未穷尽弦振动的一切可能规律.

欧拉清楚地理解, 一切都归结为这个问题: 是否任何 (表示弦的初始形状的) *函数 f 都能展为倍角正弦的级数?* 他自己对这问题的答案是否定的. 首先是, 弦的位置所沿的初始曲线可以完全不能以任何方程表出, 即特别是不能表示为伯努利方程 (12). 但即使它可表示为分析式, 则这式子也可能并不具有由方程 (12) 表示的每一曲线共同的那些特点. 这些特点中第一是纵坐标 (横坐标的函数) 的奇性, 第二是这函数有周期 $2l$.

欧拉的反驳需要解释: 须知函数 $f(x)$ 只在由 0 至 l 的区间内给出, 在这区间内这些特点根本表现不出来. 但当时还默认*如果变量在某区间变化时两个解分析式有相等的值则它们在区间外也到处恒等*. 所以, 比如说, 如果函数 $f(x)$ 在区间 $(0,l)$ 内用决没有第二种性质的代数式给出, 则由于上面说的, 甚至在这一个区间范围内它也已经不能与 (12) 那样的式子一致了.

达朗贝尔在其反驳中还更进一步: 依他所见, 甚至即使欧拉的曲线各部分都由统一的分析式联系起来, 则它也仍然不必须遵循伯努利所指出的规律. 如此达朗贝尔否定了恰恰满足他自己的要求 —— 要求振动的弦的种种不同位置都 "由同一方程所概括" —— 的解.

在伯努利这一方面则他现在坚决主张, 像 (12) 那样的方程包括所有的曲线: 既然拥有无限多系数, 就可使它所表出的曲线通过无论多少个预先给定的点. 此时在他眼中特别有价值的仍然是

①这就与解常微分方程时所遇的任意常数相似.

在于问题的物理方面, 即 “能将存在于自然界的看起来不服从任何规律的运动化为简单等时运动……”.

423. 函数的三角展开式 · 系数的决定 在所有这些讨论中最令人惊异的是: 欧拉此时自己已经拥有代数函数展为三角级数的例子 (当然完全是形式地得来的).

在《微分学》(1755 年) 里我们可找到展开式

$$\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}+\cdots=\frac{\pi-x}{2} \tag{13}$$

[参看 **406** 段, 1)], 关于它欧拉于 1744 年就已写信告诉他的朋友哥德巴赫. 1760 年刊出欧拉 1754 年所写的论文, 其中由展开式

$$\frac{\cos x-a}{1+a^2-2a\cos x}=\cos x+a\cos 2x+a^2\cos 3x+a^3\cos 4x+\cdots$$

出发并且令 $a=\pm 1$ 而得出发散级数

$$\begin{aligned}&\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cdots=-\frac{1}{2},\\&\cos x-\cos 2x+\cos 3x-\cos 4x+\cdots=\frac{1}{2},\end{aligned} \tag{14}$$

然后将第二式逐项积分而得下列结果:

$$\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots=\frac{x}{2}. \tag{15}$$

[参看 **406** 段, 2)], 欧拉解释道: “没有附加常数的必要, 因为在 $x=0$ 时总和本身化为 0”. 对这些及类似的展开式的应用范围欧拉未有任何指示.

有趣的是, 欧拉没有由级数 (14) 的第一个逐项积分得出展开式 (13). 这是后来 (1772 年) 丹尼尔 · 伯努利才做出的. 他首先强调, 等式

$$\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}+\cdots=C-\frac{x}{2}$$

中积分常数的决定须要 “小心”: 例如, 不能简单地令 $x=0$ 来决定; 伯努利令 $x=\frac{\pi}{2}$ 并利用著名的莱布尼茨级数 [**255** 段, (20)] 而得到等式

$$C-\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4},\quad \text{由此得 } C=\frac{\pi}{2}.$$

伯努利 (最先) 明确指出所得展开式的应用范围 —— 由 0 至 2π 的区间, 而对 $x=0(2\pi)$ 则等式不成立. 此外, 对其他区间: 由 2π 至 4π, 由 4π 至 6π 等则积分常数都须相应地予以改变 (虽然这也 “与连续性规律冲突”).

如何确定预先给定的函数的三角展开式系数这一重要问题 —— 依一般形式 —— 似乎是最先由克莱罗提出的, 见于其 1757 年一篇理论天文学的论文. 其中谈到函数在由 0 至 π 的区间内依余弦的级数展开式. 作者先解决一个内插法问题, 将级数限制于有限多项 (n 项) 而令其和与同一数目等距离点上的函数值一致; 系数则以某种和的形式得出. 然后他只是 “取 n 无穷”, 实质上即是取极限, 而以我们所熟悉的积分表示式的形式确定 “精确” 的系数值 [**405** 段, (16)][①].

这样的公式 1777 年欧拉自己也曾得出, 它用的正是我们现在通行的方法, 也即用逐项积分的方法. (欧拉的论文被迟了很久才发表出来 —— 已经是 1798 年了). 欧拉将其结果陈述为 “一般

① 内插法问题 —— 联系弦振动形式问题 —— 若干年后也由拉格朗日解决.

定理”的形式, 其条件中含有函数能展为余弦级数的假设. 至于是否任意函数都能有这种展开式则在此未提及.

对待这个问题的态度的转折点是 19 世纪傅里叶关于热传导的数学理论的研究. 这些研究于 1807 年起由巴黎科学院分别以通讯及备忘的形式作了报导, 并且大部分总结于《热的分析理论》(1822年) 这一著作中, 此书很快就广泛流传.

傅里叶与欧拉一样也用逐项积分法建立了函数的三角展开式系数的积分公式. 由于用这些公式能很容易地算出“完全任意的函数”的系数, 他有了所有这种函数都能如此展开的信念. 在傅里叶同时代人士中产生深刻印象的是在区间各部分分别有不同规律的函数的展开式, 例如

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\alpha}{n}\sin nx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } 0<x<\alpha \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } \alpha<x<\pi \text{ 时}.\end{cases}$$

傅里叶 (在由 0 至 π 区间中!) 将偶函数 $\cos x$ 用正弦展开, 而奇函数 $\sin x$ 用余弦展开. 这些给以前的看法一个坚决的打击: 所谓“混合”函数与“连续”函数 (按欧拉的术语) 间的差别消失了. 同时以前关于“任意”函数的三角展开的争论以有利于伯努利一方而确定地解决了.

在一系列情形下可以直接验证傅里叶所建立展开式是收敛于相应的函数的. 另一方面, 这些展开式在数学物理中找到了越来越广大的应用. 但是, 尽管如此, 傅里叶的思想起初很少得到同情: 逐项积分法当时虽已习用, 但它不是证明而是假设展开式的可能性, 而后者正有待证明!

424. 傅里叶级数收敛性证明及其他问题 不错, 傅里叶自己在其著作末尾已经尝试证明函数的三角展开式的正确, 但他的论证在分析的严密性方面远远不够, 虽然他那以几何形式表出的基本观念事实上是正确的. 后来跟着有别的数学家进行过尝试, 其中包括柯西, 但这些尝试也引起了反对.

对傅里叶的结论给出第一个真正严密的证明的是狄利克雷 (1829 年), 这个证明实质上用了傅里叶自己的想法. 虽然在论文的标题上[①]还有“任意函数”的字样, 但事实上狄利克雷精确地限制了他所考虑的函数类: 这类函数在区间 $[-\pi,\pi]$ 内有定义并且有限, 逐段连续并且逐段单调[②]. 如果函数 $f(x)$ 满足这些条件, 则如狄利克雷所证明, 它的按傅里叶公式组成的三角级数在 $-\pi<x<\pi$ 时收敛于和

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

而 $x=\pm\pi$ 时收敛于和

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

经过不长的时间后 (1834—1835 年), 罗巴切夫斯基也给出这展开定理的证明, 但在函数上加上另一些与狄利克雷不同的条件. 即罗巴切夫斯基假设函数一般是可微分的, 最多要除去有限个跳跃点, 以及函数或导数由这边或那边趋于无穷的点; 同时函数还要保持可积分 —— 依正常或反常的意义[③]. 狄利克雷条件与罗巴切夫斯基条件两者之中, 没有一个能包括另外一个.

后来别的学者建立了一系列关于傅里叶级数收敛于原函数的更一般的充分判定法.

[①] Peter G. Lejeune Dirichlet “论在已知范围内表示任意函数的三角级数收敛性” (哈尔科夫数学丛书, B 类第二集, 1914, 3–23 页).

[②] 这就是说基本区间可分为有限多段, 每段里函数都分别单调变化.

[③] Н. И. Лобачевский “关于三角级数收敛性” 及 “无穷级数收敛性判定法 ······” (全集第五卷, 1951, 31–80 及 81–162 页).

在三角级数论发展中占重要地位的是黎曼的一篇著名的论文[1] (成于 1854 年, 刊出于 1867 年). 他开头先略述这问题的历史. 然后讲定积分概念的精确化并且建立其存在的条件. 由此推广了傅里叶级数的应用范围 (例如搞清了狄利克雷定理中任何关于函数连续性的假设都是不必要的). 但该论文主要内容却是考虑像

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{16}$$

这一般形式的三角级数并且阐明了用这类级数表示周期 2π 的任意函数 $f(x)$ 的必要条件. 对级数 (16) 黎曼做出级数

$$\frac{a_0}{4}x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2},$$

它是由级数 (16) 经两次形式的逐项积分得出的. 在 $a_n\to 0$ 及 $b_n\to 0$ 的假设之下 (问题总可化为这种情形), 后一级数在 $-\infty$ 至 $+\infty$ 全区间内一致收敛并且在其中定义一个连续函数 $F(x)$. 论文的最后部分讲函数 $F(x)$ 的性质及其与函数 $f(x)$ 的关系. 与黎曼论文接近的有一系列别的学者的作品, 利用了他用来研究级数 (16) 的方法和他所得出的一些结果.

首先发生了*函数的三角级展开式的唯一性问题*: 须知给出这种展开式的系数的欧拉 – 傅里叶公式是用级数的逐项积分法建立起来的, 而在 19 世纪后半期中已认识到这种方法是不能无条件采用的. 第一个提出上述问题的是海涅[2] (1870 年), 但其完全的解决是这时候康托尔给出的, 他证明了下面这个一般的定理: *如果函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 内能展为像 (16) 式那样的级数, 则这种展开式是唯一的*. 上述唯一性在所说区间中有一些这样的例外点时也仍成立. 在这些点上不知道级数的和是什么, 也不知道它是否收敛 (不过如果这种例外点的集合是*无穷的*, 则它还须有某一些限制).

函数 $f(x)$ 的这个唯一展开式的系数又如何呢 (如果能有这种展开式的话)? *是否总是和傅里叶的系数一样*? 当然, 这问题只能对凡是出现于欧拉 – 傅里叶公式中的积分都有意义的那种函数来提出. 很奇妙的是, *这问题的答案竟是肯定的*. 起先是 1872 年阿斯科利[3]对连续函数加以确立, 然后是 1874 年杜布瓦 – 雷蒙[4]对正常可积函数加以确立. 后来这结果还推广到更广义的可积分函数上. *这些作品最先有力地说明了研究者对傅里叶级数展开式这样特殊地注意是有理的*.

只剩下一个问题. 狄利克雷相信*每个周期为 2π 的连续函数*都能展为傅里叶级数, 不过他不能证明. 别的数学家似乎也有同样的信念. 但是杜布瓦 – 雷蒙经过一系列徒然的尝试来证明狄利克雷的假设后, 于 1876 年举例*推翻*了它. 他做出了这样一个连续函数, 在任意小的区间中都有无穷多个点, 使它的傅里叶级数成为发散.

关于历史谈到这里就结束了. 虽然三角级数论的初等部分无疑属于分析原理的范围, 但进一步的发展就要牵涉到读者所不熟悉的较精致的概念和知识了.

425. 结尾语 我们要在此强调指出三角级数论在数学分析史中所占的特殊地位.

首先是, 密切联系着这种理论的是*函数概念本身的明确化*. 欧拉与丹尼尔 · 伯努利关于 "任意" 函数展为三角级数的争论大有助于消除某些偏见和不正确的思想并终于在傅里叶的著作中予

[1] Bernhard Riemann, "论用三角级数表示函数的可能性" (*哈尔科夫数学丛书*, B 类第二集, 1914, 27–85 页, 或*文集* 1948, 225–261 页).

[2] H. E. Heine (1821—1881) 是德国数学家.

[3] Giulio Ascoli (1843—1896) 是意大利数学家.

[4] P. du Bois-Reymond (1831—1889) 是德国数学家, 生于瑞士.

以澄清. 函数的现代一般定义恰好在罗巴切夫斯基和狄利克雷的三角级数研究中找到绝不是什么偶然的事情!

联系着傅里叶级数论的需要, 黎曼明确化了并且推广了定积分概念. 康托尔在其所建立的无穷集合论中最先做的几步是关于三角级数展开式唯一性问题的. 现代发散级数广义求和理论也肇始于泊松[1]关于三角级数求和的研究. 甚至有些精致的分析概念 (例如, 数项级数的绝对收敛与非绝对收敛及函数级数的一致收敛与非一致收敛等) 即使其出现与三角级数理论无关, 但它们也立即被应用到这种级数上, 后者似乎成了其重要性的试金石. 这种情况至今仍旧如此.

三角级数在数学物理及许多技术部门中有直接的应用 (读者由前面所讲弦振动问题之例当可对此有点概念). 但应用范围更广的是所谓 "广义傅里叶级数", 即依种种别的正交函数系的展开式, 三角展开式可算作它们的模型而它们的理论与傅里叶级数论密切地交织在一起.

[1] Siméon Denis Poisson (1781—1840) 是法国杰出力学家、物理学家兼数学家.

附录 数学分析进一步发展概况

读者掌握了数学分析基础知识之后, 当然乐于知道目前组成 (广义的) 数学分析的各种科目的情况, 哪怕只是一个大略的轮廓也好.

I. 微分方程

关于分析的这一分支读者在大学课程里已经知道一点, 因此现在可以谈得简略些.

在微积分发展的 "史前期", 已经出现了当时所谓 "切线问题之逆", 也即由切线性质来求原曲线的问题. 在牛顿与莱布尼茨的著名通信中提到过这些问题 [**228** 段]; 那里莱布尼茨最先采用了 "微分方程" 的名称.

牛顿在其《流数术》中所提出的第二基本问题 —— *由含流数的方程求流量间的关系* —— 我们在 **225** 段已经指出它就是*常微分方程*的一般求积问题. 牛顿一般是用幂级数来解的而不力求将解表示为 "有限的" 分析式. 莱布尼茨及伯努利兄弟对微分方程花了很多力量, 有时也利用了无穷级数. 但正是他们最先系统尝试用*化为求积*来解某些类型的一阶微分方程.

直到 18 世纪, 微分方程的理论才发展到自成独立学科的地步. 在此起重大作用的是欧拉的大量而多样的作品.

我们要记得, 常微分方程的 "全解" (即通解) 及 "特解" 的概念就是欧拉所建立的; 他对于不包含在全积分里的解 (奇解) 也研究不少. 他广泛地发展了*积分因子*的方法, 不仅是对一阶方程的, 并且也有对高阶方程的. 欧拉还创造了用*特征方程*来解常系数线性齐次微分方程的方法并且阐明了其通积分的形式. 联系着圆膜振动问题, 欧拉最先考虑到一般的*圆柱函数*方程

$$\left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2}\right) u + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{d^2u}{dr^2} = 0$$

(后来称为 "贝塞尔方程"), 而将其解表示为无穷级数的形式. 常微分方程的第一种近似解法也出于欧拉之手.

欧拉以及克莱罗、拉格朗日等 18 世纪数学家的工作大大地推进了*常微分方程的形式的理论*.

现在来谈偏微分方程. 在这方面欧拉也有很大的功绩. 他对一阶方程作了许多研究. 另一方面, 许多力学和物理学问题常常使欧拉考虑到二阶 (及更高阶) 的方程[1]. 偏微分方程的特点是在解里出现任意函数. 这情况是达朗贝尔最先以弦的振动方程为例指出的 [**420** 段], 但欧拉则利用任意函数, 使由所考虑的问题产生的初始条件也得到满足, 而由此将研究进行到底.

与欧拉同时代的丹尼尔 · 伯努利的种种作品也对数学物理后来的发展起了重大的影响. 他提出解弹性系振动问题的一般方法. 在此所求相应方程的解分解为一系列最简单的解, 弦振动方程的解即其一例 [**421** 段]. 数学物理在 19 世纪之初已经繁荣起来, 并且是与泊松、傅里叶、柯西及奥斯特罗格拉茨基等的名字分不开的.

提高严密性的一般倾向自然引起了微分方程 (或方程组) 的解的*存在*问题. 这里关于常微分方程的最早结果是柯西得出的, 关于偏微分方程的结果则是索菲娅 · 柯瓦列夫斯卡娅[2]得出的.

19 世纪之末, 由于力学和天文学的要求, 出现了*常微分方程及这种方程组的定性理论*, 即按方程本身来决定解的种种性质而不用积分起来. 这种理论的奠基者是庞加莱和李雅普诺夫[3]. 李雅普诺夫的思想在苏联数学家的著作中有了进一步的发展.

我们还要指出, 最近时期一些年轻的分析科目 —— 实变函数论及泛函分析 —— 对微分方程理论 (特别是偏微分方程) 发生了确定的影响 (参看第五章及第六章). 这种影响不仅反映在微分方程理论的一般观点及其基本概念的理解法上, 并且也在这种理论里引出了重要的具体结果.

II. 变分法

变分法产生于 17 世纪之末, 即在 "无穷小分析" 本身建立之后不久; 但它同时又组成所谓*泛函分析*的一部分, 后者是 20 世纪才发展起来的 (参看第六章).

为叙述起来清楚一点, 我们首先建立一个属于*泛函分析*的概念.

设有一条平面曲线 (图 84)

$$y = f(x) \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1).$$

我们来考虑: 1) 以它为界的曲线梯形的*面积* P, 2) 曲线*弧长* S, 3) 该曲线绕 x 轴旋转所得曲面的*面积* Q, 4) 以此曲面为界的旋转体之*体积* V. 这些例子中的量都是*取决于曲线的形状的*, 或者说*取决于函数 f 的形式的*, 也即*取决于其全体数值的*. 这些量在前面都有了积分的表示法 [**196, 201, 205, 198** 诸段]:

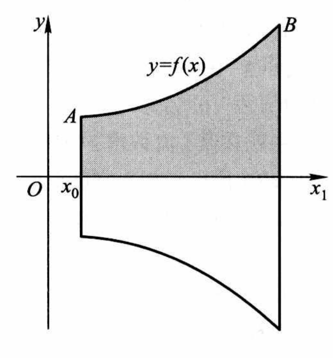


图 84

$$\left.\begin{aligned} P &= \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx, & S &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+[y'(x)]^2}dx, \\ Q &= 2\pi\int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx, & V &= \pi\int_{x_0}^{x_1} [y(x)]^2dx. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

[1] 这类问题及相应方程的解法组成所谓数学物理的对象.

[2] София Василбевна Ковалевская (1850—1891) 是第一个女数学教授.

[3] 法国学者 A. Poincaré (1854—1912) 及俄罗斯院士 Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918) 是两位杰出的数学家.

我们看出, 函数 y 在此处于 "自变量" 的地位: 它的给定就唯一地决定每个量的值. 在这样的情形, 即对函数 $y = y(x)$ 按某一法则有某一变量的数值与之相应时, 则此变量称为函数 y 的**泛函**而表示成

$$U(y)^{①}.$$

(1) 中的泛函都是下列泛函的特例:

$$U(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx, \tag{2}$$

这里 F 理解为三个自变量的已知函数, 而 $y = y(x)$ 是 x 的任意 (连续可微) 函数, 只要能使被积式及积分有意义就行了.

为简单起见我们现在限于对 (2) 型泛函来陈述最简单的变分法问题如下: 在所有连接点 (x_0, y_0) 和点 (x_1, y_1) 的光滑曲线中试找出一条使泛函 (2) 有最大值 (或最小值) 的曲线.

但是泛函常常是只就 "局部" 极大或极小值来研究的 —— 泛函在所求曲线上的值只与它在充分 "接近" (在某种意义下) 所求曲线上的值比较, 不难看出这里与单变量或多变量函数情形的 "局部" 极值定义相似之处 [**112, 151** 段].

变分法通常算是起源于 1696 年, 当时约翰 · 伯努利以解 (伽利略所提出的) 捷线问题 (即最速降线问题) 来向其同时代的数学家挑战. 问题是这样的: 由连接两个不同在一铅垂线上的点 A 与 B 的一切曲线之中找出这样一条曲线, 使一个质点 (只在重力影响之下而无初速) 沿该线由点 A 滑降至点 B 的时间最短. 所求曲线得出是一条摆线 (也称旋轮线), 其底是水平线而尖端在点 A.

这就是一个类型 (2) 的泛函问题, 设坐标轴布列如图 85. $y = y(x)$ 是连接点 $A(0,0)$ 和 $B(x_1, y_1)$ 的任一曲线. 在一个具有质量 m 的质点沿此曲线由位置 A 移动至位置 B 时, 重力做的功是 $mg \cdot y$, 它按 "动能定律" 应该等于该质点的动能 $\frac{1}{2}mv^2$. 由此有

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

及

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}dx.$$

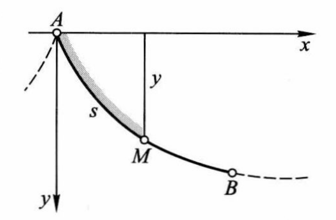


图 85

对 x 由 0 至 x_1 积分起来终于得出由 A 移动至 B 所费总时间 T 的表达式如下

$$T = T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}dx, \tag{3}$$

它正是属于 (2) 的形式.

在这问题之后跟着有另一些问题; 它们的解法全不一样, 每个都需要特殊的办法: 发生了一种与无穷小分析形成之前的那一阶段相像的情况!

由 1726 年起彼得堡科学院的刊物开始发表欧拉关于这新型极值问题的一系列作品. 它们总结于著名的论著《求具有极大极小性质的曲线的方法, ······》(1744 年)②. 这里最先给出了解种

①不可将泛函与函数之函数 (即复合函数) 相混: 在复合函数中对每个 x 值分别有一数值与之相应, 而在泛函中则对整个函数 $y(x)$ 有一个数与之相应.

②有俄文版 (ГТТИ, 1934).

种类型变分法问题的一般的"直线"方法. 欧拉以折线替代曲线而将变分法问题化为求多变量函数的极值问题.

例如, 在最简单的变分问题的情形, 上面讲的就是关于折线纵坐标 $y^{(i)}$ 的函数

$$\sum_i F\left(x^{(i)}, y^{(i)}, \frac{\Delta y^{(i)}}{\Delta x^{(i)}}\right) \cdot \Delta x^{(i)}$$

的极值. 令此式对任何纵坐标 $y^{(i)}$ 的导函数等于 0, 欧拉终于得出二阶微分方程

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$$

或者写成展开的形式

$$F'_y - F''_{y'x} - F''_{y'y} \cdot y' - F''_{y'y'} \cdot y'' = 0,$$

如此, 这个方程表示出曲线 $y = y(x)$ 使泛函 (2) 达其极值的必要条件. 如果我们能结合边界条件 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ 而解出欧拉微分方程, 则常常可以立即得出所求的曲线. 例如, 在捷线问题的情形可以取 [参看 (3)]

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}},$$

而欧拉方程有这样的形状:

$$2yy'' + y'^2 + 1 = 0.$$

由此不难降阶而求得首次积分

$$y(y'^2 + 1) = 2C_1,$$

如此

$$dx = \sqrt{\frac{y}{2C_1 - y}} dy.$$

这里令 $y = C_1(1 - \cos t)$, 我们求得 $dx = C_1(1 - \cos t)dt$, 故 $x = C_1(t - \sin t) + C_2$. 假定 $t = 0$ 时曲线通过原点, 即得 $C_2 = 0$; 常数 C_1 则可由曲线通过第二个已知点来决定. 如此就得出上面所说的旋轮线.

虽然欧拉的方法是很繁复的并且论证也欠严密, 但他的这些研究已奠定了变分法这一特殊数学学科的初步.

稍后, 当时还年轻的拉格朗日建立了变分的方法而在变分法历史中揭开了新的一页, "变分法"这个名称也就由此而来. 在 1755 年他写信告知欧拉, 而欧拉在后来的著作中也就采用了这种新方法. 变分法概念与寻常分析中的微分概念很为类似, 但所联系的不是 x 的变化, 而是函数 $y(x)$ 的变化. 如果函数 $y(x)$ 使泛函 $U(y)$ 达其极值, 则 U 的变分 δU 变成 0 (也只是必要条件!).

变分法的历史就讲到这里为止, 我们只再提一下, 拉格朗日的理论被奥斯特罗格拉茨基推广到了多重积分的情形; 以后更建立了极值的充分条件; 最后, 在近几十年来对欧拉的想法又重新发生了兴趣, 并且他的方法成了解决变分问题的"直接"方法的原型 (尤其是在苏联数学家的著作里).

几乎所有力学及物理的基本规律通常都陈述为规定某一泛函的变分应该是 0 的"变分法原理". 由于这个缘故变分法使许多重要的物理问题及技术问题得以解决.

III. 复变函数论

复数在 16 世纪之初就常出现在数学里, 但经历几百年之久才好不容易地慢慢被掌握了. 直到 18 世纪, 欧拉 (我们又得提起这位多能天才学者的名字!) 才开始考虑复变量及其函数. 在 30 年代和 40 年代中他研究了整个初等复变函数的理论, 对此不仅利用了幂级数工具 (这是由牛顿时代就知道的), 同时也利用了无穷乘积及简分式级数. 我们已经知道 [**254** 段], 指数函数与三角函数间的那个奇妙关系也出自欧拉之手.

欧拉的工作的另一重要环节是对复变量的积分 (这里是计算原函数的意义). 在其 1777 年间彼得堡科学院提出而 1793 年才发表出来的一篇论文里, 欧拉考虑了积分 $\int Z(z)dz$, 而把 $Z(z)$ 理解为一个以分析方式给出的函数 (比如说以幂级数给出), 并且在此以虚变量 $x+yi$① 替代 z. 于是该积分就有 $P(x,y)+Q(x,y)i$ 的形状, 而被积式变成这样:

$$[M(x,y)+N(x,y)i][dx+dyi]=[Mdx-Ndy]+[Ndx+Mdy]i.$$

分别比较所得等式的实部和虚部得到两个积分

$$P=\int(Mdx-Ndy),\quad Q=\int(Ndx+Mdy).$$

既然微分式 $Mdx-Ndy$ 及 $Ndx+Mdy$ 如此分别成 P 及 Q 的恰当微分, 则 M 与 N 之间必须具有表征恰当微分的关系

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{\partial N}{\partial x}\quad 及\quad \frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial x}. \tag{4}$$

如此最先以一般形式出现了复变函数 Z 的实部及虚部的偏导数间的关系②. 这些关系在函数论进一步的发展及应用中都将起重要的作用.

将此理论建立成为独立而内容丰富的学科一事当归功于柯西和黎曼.

柯西在其 “论虚限定积分” (1825 年) 中一开头就建立定积分

$$\int_{x_0+y_0i}^{X+Yi}f(z)dz \tag{5}$$

的概念, 把它作为积分和的极限 —— 这与曲线积分相似 [**330**段]. 但是 “曲线” 一词是在该论文中别处提到的, 而这里柯西直接考虑两个具有 (连续) 导函数的单调连续函数:

$$x=\varphi(t),\quad y=\chi(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T), \tag{6}$$

条件是要

$$\varphi(t_0)=x_0,\quad \varphi(T)=X;\quad \chi(t_0)=y_0,\quad \chi(T)=Y,$$

于是将积分 (5) 化归对实变量 t 的寻常积分 [参看 **331** 段, (6)]:

$$\int_{t_0}^{T}f(\varphi(t)+\chi(t)i)(\varphi'(t)+\chi'(t)i)dt.$$

① 为简单起见我们今后写通行的 i, 但欧拉在此还写的是 $\sqrt{-1}$. 不久他就引入了记号 i, 但不是立即通行.

② 但这类关系在达朗贝尔 (1752 年) 及欧拉的流体力学研究中已经接触到.

这里, 还假设函数 $f(z)$ 有 (连续) 导函数而建立了一个基本定理: 积分 (5) 与函数 (6) 的选择法无关 (即与积分道路无关). 柯西用变分方法, 给出该定理的证明.

关于函数 $f(z)$ 的同一假设之下柯西在后来发表的作品及讲演中建立了沿闭界线积分等于 0 这个事实, 并且推出下面以他命名的著名公式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(t)}{t-z} dt,$$

这里积分是沿复数平面上一个区域 (K) 的界线 (C) 来取的, 而 z 是这个区域的任意一个内点. 我们在此遇到了该类型复变函数的这个奇妙性质: 区域内的函数值由其边界上的值唯一地决定!

虽然柯西证明它的定理时只假设了函数 $f(z)$ 于所论区域内有一阶 (连续) 导函数, 但由公式本身却可以 (比如说借助对 z 的积分号下逐次微分) 直接推出函数 $f(z)$ 的所有各阶导函数都同时存在. 而且: 取以 r 为半径、以点 z_0 为中心的圆作区域 (K) 时可以肯定, 函数 $f(z)$ 在此圆内可展为 $z - z_0$ 的幂级数, 也就是它的泰勒级数 [参看 **277** 段]. 由此推出柯西对泰勒级数收敛半径所作的一般论断: 这半径总等于点 z_0 与 $f(z)$ 的最近 "奇点" —— 在这奇点的邻近 $f(z)$ 不再是具有 (连续) 导函数的单值函数 —— 的距离.

由此阐明了像这类莫名其妙的情况: 函数 $\arctan x$ 及其导函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 只在 -1 至 $+1$ 区间内可展为 x 的幂级数, 其收敛半径为 1. 在实数轴上它们一般没有 "奇点", 但如果过渡到复数区域, 则相应复变函数 $\arctan z$ 及 $\dfrac{1}{1+z^2}$ 就在虚数轴上有 "奇点" $z = \pm i$, 因此收敛半径等于这两个数的模, 即等于 1. 如此, 复变函数的理论有时可以帮助我们理解关于实变函数的规律!

要了解清楚的是, 复变函数 $w = f(z)$ 的导数存在的条件比起实变函数的相应条件来要严格得多. 须知无论 $z + \Delta z$ 以怎样的方向趋近于 z 极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz}$$

应该恒有同一数值. 因此, 由复变函数 (连续) 导函数存在这一简单事实就能推出那么多令人惊讶的结果其真正的原因就在于此. 这种唯一的导数存在的条件的问题发生得比较晚: 柯西于 1847 年接触到这个问题, 而黎曼于 1851 年则用它作为其论文 "一元复变函数一般理论基础" 的开篇[①]. 如果令 $z = x + yi$ 且 $w = u + vi$ 而 u, v 是实变量 x, y 的函数, 则上述条件化为关系式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{4a}$$

读者当可认出这就是欧拉方程 (4). 这些关系式也就是复变函数在静电学、流体力学、气体力学、弹性力学及热导理论等方面的应用的基础.

如果将复变量 z 和 w 解释为相应平面上的点, 则它们之间的函数关系 $w = f(z)$ 就对自变量平面上区域 $\mathscr{Z}$ 内的每个点 z 给出函数值平面上区域 $\mathscr{W}$ 内的一个定点 w 与之相应. 换句话说, 函数 $w = f(z)$ 实现了一个由区域 $\mathscr{Z}$ 到区域 $\mathscr{W}$ 的点变换 (图 86). 由函数 $f(z)$ 在区域 $\mathscr{Z}$ 内唯一导数的存在 (只要它不等于 0), 黎曼推出了这变换有一种奇妙的性质: 如果在区域 $\mathscr{Z}$ 内取两条相交的曲线 (图 86 上的 zz_1 和 zz_2), 而在区域 $\mathscr{W}$ 内取其相应曲线 (ww_1 和 ww_2), 则两对曲线所成两角必相等 (两角按相同的方向计算): 这是一种保角变换或者说, 共形变换.

①参看《贝耐德 · 黎曼文集》(Гостехиздат, 1948), 49–87 页

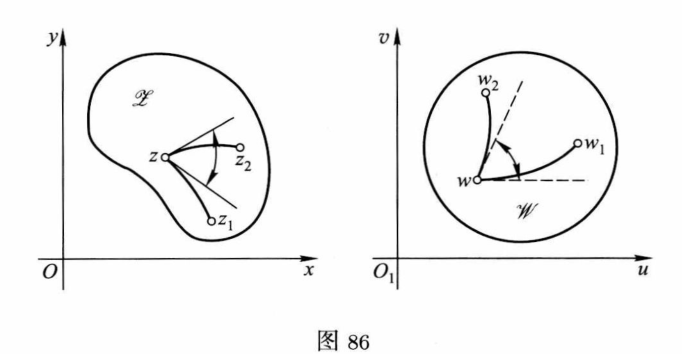


图 86

共形变换, 联系着画地图问题, 是远在黎曼之前就经欧拉、拉格朗日和高斯研究过的. 但黎曼最先明确地把函数 $w = f(z)$ 实现共形变换这一性质与该函数有确定导数这一情况联系起来. 他证明了共形变换论中的基本定理: *一个圆可以由共形变换变成一个任意的单连通域* (而在一定条件下这种变换也是唯一的), *其逆也真*. 这种变换在复变函数论的种种应用中常常用到. 这一思想也就是茹科夫斯基[①]建立机翼理论的基础.

关于复变函数后来的辉煌发展我们不再多谈了.

IV. 积分方程论

一个函数方程, 如果在积分号下含有所求的未知函数, 则称为*积分方程*[②]. 在求未知函数时如果就由积分方程出发, 常是比由微分方程出发更为方便. 这种情况读者在微分方程论中证明 "存在定理" 时已接触到: 例如, 那里方程式 $y' = f(x, y)$ 连同初始条件 $y(x_0) = y_0$ 即由一个*积分方程*

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx + y_0$$

所替代, 随后对此应用逐次逼近法就很方便, 从形式的观点看来, 在本书中讨论*傅里叶变换*时, 可以说已经牵涉到积分方程了 [**412** 段, 公式 (13), (14), (15)].

在吸引数学家注意积分方程一事上起重要作用的是阿贝尔所提出并解决的一个力学问题 (1826 年). 该问题中要*找这样一条铅垂平面上的曲线 AB, 使得一个质点由任意一点 D 沿该曲线无初速而滑降至其最低点 A 时所需时间正恰好是点 D 之高 a 的一个预先给定的连续函数*:

$$\tau = \varphi(a).$$

将坐标轴布列如图 87, 并设所求曲线的方程为 $y = y(x)$. 在该质点由初始位置 D 移至 M 时按动能定律将有 (同前面最速降线问题中一样)

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(a - x), \quad v = \frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(a - x)}^{③},$$

[①]Николай Егорович Жуковский (1847—1921) 是著名俄罗斯学者.

[②]这名词最先于 1888 年见于杜布瓦 - 雷蒙的著作里; 他明白指出, 偏微分方程论的成就牵涉到积分方程的研究, "但对此种方程, 尚一无所知".

[③]记住弧 $s = \widehat{AM}$ 随 t 的增大而变小.

由此有

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(a-x)}},$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{\sqrt{a-x}} dx.$$

以 $\sqrt{2g}u(x)$ 表 $\sqrt{1+[y'(x)]^2}$, 则我们有积分方程

$$\int_0^a \frac{u(x)dx}{\sqrt{a-x}} = \varphi(a). \tag{7}$$

它可用来决定未知函数 $u(x)$.

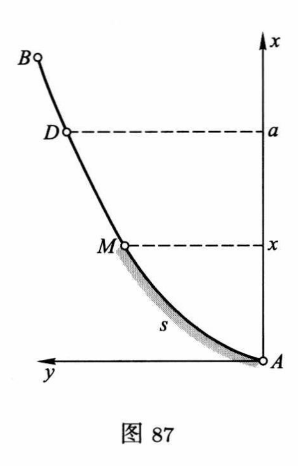


图 87

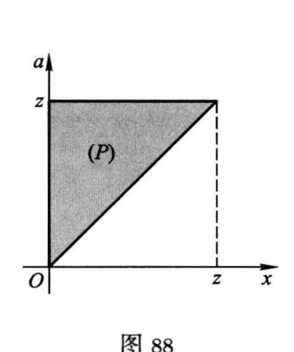


图 88

阿贝尔事实上甚至已解决了较一般的方程

$$\int_0^a \frac{u(x)dx}{(a-x)^\alpha} = \varphi(a) \quad (0 < \alpha < 1),$$

为简单起见我们姑且只谈方程 (7).

将该方程两边乘以 $\dfrac{1}{\sqrt{z-a}}$ 并依 a 由 0 至 z 积分:

$$\int_0^z \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{z-a}} = \int_0^z da \int_0^a \frac{u(x)dx}{\sqrt{(z-a)(a-x)}}.$$

将右边累次积分中的积分次序按**344**段公式 (9) 予以调换[①]:

$$\int_0^z u(x)dx \int_x^z \frac{da}{\sqrt{(z-a)(a-x)}}.$$

因为内层的积分在此等于 π[**292** 段, 1)], 所以得到等式

$$\int_0^z \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{z-a}} = \pi \int_0^z u(x)dx,$$

① **344** 段附注所说区域 (P) 在此可以用图 88 中的三角形. 但因 $a=x$ 或 $a=z$ 时被积函数变成 ∞, 故调换积分次序之合法性, 还须另行验证.

再依 z 微分, 终于得出所求函数如下式:

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{z-a}}.$$

知道了 $u(x)$, 就不难定出 $y(x)$.

阿贝尔方程 —— 同时保留其解法的原理 —— 很久以后 (1884 年) 又经索宁[①]推广. 这问题被沃尔泰拉[②]所完成. 他于 1896 年开始发表一系列研究文章, 其中叙述了形如

$$\int_a^x N(x,s)\varphi(s)ds = F(x) \quad 及 \quad \varphi(x) + \int_a^x N(x,s)\varphi(s)ds = F(x)$$

的积分方程的一般理论, 而这两种类型的方程后来也就分别被称为第一类及第二类 "沃尔泰拉积分方程". 这里 $\varphi(x)$ 是所求的函数, 而 $N(x,s)$ 和 $F(x)$ 是给定的函数. 此后不久, 在 1900 年至 1903 年间, 出现了弗雷德霍姆[③]的关于方程

$$\int_a^b N(x,s)\varphi(s)ds = F(x) \quad 及 \quad \varphi(x) + \int_a^b N(x,s)\varphi(s)ds = F(x)$$

的卓越论文. 这些第一类及第二类 "弗雷德霍姆方程" 与 "沃尔泰拉方程" 的区别是这里两积分限都是常数. (但只要令 $s > x$ 时 $N(x,s) = 0$ 就可把沃尔泰拉方程看作弗雷德霍姆方程的特例.)

不深入叙述弗雷德霍姆的理论了. 我们只指出, 它在某种意义上颇像代数线性方程的极限情形.

在 20 世纪过去 50 年间, 积分方程论在种种方向有了广阔的发展, 并且成为一种研究自然现象的重要而有力的工具.

V. 实变函数论

虽然全部数学分析教程就是研究实变量的函数, 但本标题所指的却不是这个 "古典的" 分析分支, 而是一种比较高深和精致的理论, 并且是 20 世纪初才出现的. 但是, 它的渊源可以在 18 世纪末及 19 世纪初发生的那个数学中的批判思潮中看到, 这种思潮前面已屡次提到过. 对数学证明的严密性要求的提高引起了对老一辈数学家一系列质朴的论证的怀疑. 例如, 安培 (1806 年) 及某些学者试图证明任何连续函数都可微分 (只有个别的点除外), 但这引出了波尔查诺、魏尔斯特拉斯等的反面的例子 [参看 **271** 段]. 另一方面, 对一般性的追求也就自然引起了对具有 "病理学" 特点的函数的兴趣, 这种特点是常常与我们的直觉不一致的.

这一带有否定性质的 (并且引起 "古典" 分析代表人物强烈不满情绪的) 方向整个是我们目前所谈这个学科的历史序幕. 由对旧事实的批判及对 "病理学" 的兴趣渡向正面的理论, 在很大程度上是由无穷集合论所促进的, 后者在 19 世纪的 70 年代及 80 年代间由乔治 · 康托尔所建立. 他的思想当初也遭到过同时代人的反对, 后来终于对许多数学分支 —— 特别是实变函数论 —— 的发展起了很大的影响.

[①] Николай Яковлевич Сонин 院士 (1849—1915).

[②] Vito Volterra (1860—1940) 是意大利数学家.

[③] E. I. Fredholm (1866—1927) 是瑞士数学家.

这个独立的学科于 19 世纪及 20 世纪之际在法国数学学派的著作中形成, 该学派最著名的代表是博雷尔 (É. Borel, 1871—1956), 贝尔 (R. Baire, 1874—1932) 及勒贝格 (H. L. Lebesgue, 1875—1941).

博雷尔 (1898 年) 和勒贝格 (1902 年) 所建立的线性点集的测度概念起了很大的作用, 它可应用于一大类所谓可测集合上. 点集 E 的测度mE 就是区间的长度概念的推广. 和长度一样, 它也具有可加性, 并且是一种更广义的可加性, 即: 如果有界集合 E 是有限个或甚至无穷个 (但必须是可数多个) 两两无公共点的可测集合

$$E_1 \quad E_2, \cdots, E_n, \cdots$$

之和, 则 E 也必可测, 并且 E 的测度就等于所有 E_n 的测度之和 (或测度级数之和):

$$mE = \sum_n mE_n.$$

如果一个点集 E 可以用有限个或 (可数) 无穷个区间所覆盖, 而这些区间的长度总和可小到任何程度, 则该点集的测度等于 0. 如果一个函数 $f(x)$ 在全区间的所有点上都具有某种性质, 只可能在某一测度为 0 的点集上是例外, 这时我们就说该函数在该区间内 "几乎处处" 都具有该性质. 我们利用这种说法来陈述下列两个勒贝格定理:

I. 一个在区间 $[a, b]$ 内单调的函数 $f(x)$ 在此区间内几乎处处都有导数.

II. 一条可求长的连续曲线 $y = f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$ 几乎处处有一定的切线.

这两个定理可作为新理论的正面结果的例子; 我们看到, 这里面没有什么 "病理学", 而是建立了一般的并且很精致的规律, 而且这正是在古典分析方法表现无能为力的地方.

在现代分析里具有重大意义的是勒贝格对定积分概念的推广. 假设读者记得这个概念的黎曼定义 [**176** 段]. 对于连续函数的情形①这定义是很自然的: 以几何方式来说, 在 Δx_i 不大时曲线 $y = f(x)$ 上所有和 x_i 与 x_{i+1} 间的横坐标相应的纵坐标都与其中任一纵坐标 $f(\xi_i)$ 相差很小, 并且将一个元素条近似地代以一个面积为 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 的元素矩形时可数和的极限

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

就给出曲线下面积的精确值. 如果函数 $f(x)$ 不连续, 则上述那样的替代法就没有根据了! 事实上黎曼的定义只适于在某种意义上说与连续函数 "差别不多" 的很窄的一类不连续函数, 就如勒贝格所指出的只适用于 "几乎处处" 连续的函数.

读者应记得, 如果函数 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内有连续导函数 $F'(x)$, 则按此导函数不难用下列定积分 "恢复" 原函数 [**155** 段和 **183** 段, (12°)]:

$$F(x) = (R) \int_a^x F'(x) dx + C. \tag{8}$$

但在导函数不连续 (即使是有界的) 的情形, 仅仅因为 $F'(x)$ 的黎曼积分可能不存在, 这个公式就可能无用了, 在 1881 年沃尔泰拉就已做出这种例子.

所有这些情况就构成建立新的广义的积分概念的定义的理由.

①正是对于这一情形柯西远在黎曼之前就讲过这个定义.

我们对有界函数 $f(x)$

$$A < f(x) < B \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

来说明勒贝格的积分定义的主要思想. 勒贝格不是将自变量变化区间分段, 而是将包含函数值的区间 $[A, B]$ 分段:

$$A = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_i < y_{i+1} < \cdots < y_n = B,$$

并且考虑那些使函数值介于 y_i 与 y_{i+1} 间的点的集合 E_i $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$:

$$y_i \leqslant f(x) < y_{i+1}.$$

在 $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ 不大时所有这些点事实上彼此接近, 例如说都与 y_i 相差很小. 将所有这些值都换成 y_i 而乘以集合 E_i 的测度并做出其和

$$\sum_i y_i \cdot mE_i. \tag{9}$$

当然, 此时须假设 $[a, b]$ 中使函数 $f(x)$ 的值介于任何两数 α 与 β $(\beta > \alpha)$ 间的那些点 x 的集合总是可测的; 只有这样的函数才是勒贝格所考虑的并且称之为可测的. 对于总和 (9), 不论 $f(x)$ 是怎样的可测函数, 在 $\Delta x_i \to 0$ 恒存在一有限的极限; 它就是函数 $f(x)$ 由 a 至 b 的勒贝格积分而表示成

$$(L)\int_a^b f(x)dx.$$

勒贝格积分的应用范围比黎曼的广大多了. 特别是, 借助勒贝格积分永远可以按有界导函数 $F'(x)$ 来 “恢复” 其原函数 $F(x)$:

$$F(x) = (L)\int_a^x F'(x)dx + C. \tag{8a}$$

勒贝格定义也可推广到无界函数的情形, 此时所得积分是绝对收敛的. 后来积分概念还有了进一步的推广 —— 推广到积分可以不是绝对收敛. 但其中没有哪一个像勒贝格积分这样在分析各分支中都有广大丰富的应用.

实变函数后来的成就在很大程度上出于莫斯科数学学派的活动, 这个学派的奠基者是叶戈罗夫 (Дмитрий Федорович Егоров, 1869—1931) 及卢津院士 (Николай Николаевич Лузин, 1883—1950). 下面举例引证两个基本定理, 第一个属于叶戈罗夫, 第二个属于卢津. 它们表明了, 尽管现代函数论所研究的对象非常一般, 但在某种意义上, 它与古典分析的联系总是不断的. 定理如下:

I. 任何可测函数序列 $\{f_n(x)\}$, 只要忽略某一个测度任意小的点集, 则其向极限函数 $f(x)$ 的收敛性就成为一致的.

II. 任何可测函数 $f(x)$, 只要忽略某一测度任意小的点集, 则它就成为连续的.

莫斯科学派的功绩不仅在于实变函数论本身的进一步发展, 也表现于将其概念及方法应用于别的分析分支以及概率论里.

至今我们所谈的只是所谓度量函数论, 所利用的主要是点集的测度概念. 新的函数论的另一分支, 所谓描述函数论, 导源于贝尔 (1899 年) 及勒贝格 (1905 年) 的著作, 在描述函数论中, 按照不连续函数如何由逐步取极限而形成的观点, 研究它们的构造和性质. 这些研究紧密联系着描

述集合论, 这里研究的是由区间 (或矩形等) 用一系列简单运算所得出的越来越复杂的点集类. 在这种理论的进一步深入发展中起主导作用的也是卢津及其学生等.

这里我们还提一下数学分析的一支, 即所谓构造函数论. 它所处理的是函数的近似表出法问题, 利用种种分析工具, 例如最简单的是代数多项式及三角多项式.

切比雪夫 (Пафнутий Лбвович Чебышёв) 在其 "所谓平行四边形机构理论" ① (1854 年) 文中指出, 泰勒级数段

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

当作函数 $f(x)$ 表示式时只在点 $x = x_0$ 附近比别的同次多项式好些. 如果谈的是在固定区间 $[a, b]$ 内用 n 次多项式近似表示函数, 则 "要在该区间内它与 $f(x)$ 的偏差的界限小于所有其他同次多项式的偏差界限" 时泰勒多项式还不如别的多项式 $P_n(x)$ 好. 如此, 他第一次提出了 "最优近似多项式" 的问题, 由这种多项式以

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |P_n(x) - f(x)|$$

有最小可能值这个条件为其定义; 此式通常表示为 $E_n(f)$. 切比雪夫的研究成为彼得堡学派的许多论著的出发点.

在 1885 年魏尔斯特拉斯发表了一个定理 [**278** 段], 由此明白了对 $[a, b]$ 内任何连续函数 $f(x)$ 有

$$\lim_{n \to \infty} E_n(f) = 0;$$

当然, 反过来只要这个关系成立函数 f 也就必定连续. 这就是函数 f 的构造性质 (连续性) 与 $E_n(f)$ 的性态 (趋于 0) 之间的相互关系的最简单的例子.

切比雪夫和魏尔斯特拉斯的想法在 C. H. 伯恩斯坦院士 (生于 1880 年) 及其他苏联数学家以及美国学者但海姆 · 杰克逊 (1888—1946) 等的研究中有了重要的发展. 贯穿在这些著作中的一条鲜明线索是函数 $f(x)$ 的微分性质及其他构造性质与 $E_n(f)$ 趋近于 0 的速度的相互影响.

VI. 泛函分析

这是数学分析中最年轻的一支: 它算起来还只有几十年的历史! 泛函分析的产生与下面的情况有关, 有些乍看很不相干的东西, 却可以注意到其间有着类似的地方, 因此启发人们从它们之中只选取真正属于本质的方面, 以便寻求将它们统一起来的概念, 以及能够概括有关它们的个别论证的一般论证.

这里值得注意的是, 所考虑的对象的集合通常都在某些方面与现实空间有相似之处. 这些集合也就叫做空间, 虽然其元素性质上可以是各种各样的; 像曲线或曲面、自变量连续变化的一元函数或多元函数、实数的有限组或序列 (即以正整数为自变量值的函数), 等等. 这类 "空间" 我们已经在 **125** 段 (m 维算术空间)、**418** 段 (连续函数空间) 及前面讲变分法历史的部分里 (光滑曲线或连续可微分函数) 遇到过.

① 《П. Л. 切比雪夫全集》第 II 卷 (科学院出版社, 1947), 23–51 页.

在这种空间 $X = \{x\}$ 里所考虑的及所讨论的是泛函算子

$$y = U(x) \tag{10}$$

(寻常 "函数" 概念的推广), 它按某种规律或法则对 X 的每一元素 x 配以同空间或另一空间 Y 中的一个确定的元素 y. 在 Y 就是实数集合的特殊情形, 元素 x 配以一个数, 此时泛函算子就叫做泛函 —— 这种概念上面谈变分法的历史里已经谈过.

我们只来细谈一种重要类型的空间, 即所谓度量空间. 它是指这样一个空间 X, 其中对每对点 x 与 $\bar{x}$ 都确定了一个距离 ("度量函数"), 即具有下列性质的一个非负实数 $\rho(x, \bar{x})$:

1) $\rho(x, \bar{x}) = 0$ 等价于 $x = \bar{x}$,

2) $\rho(\bar{x}, x) = \rho(x, \bar{x})$,

3) $\rho(x, \bar{\bar{x}}) \leqslant \rho(x, \bar{x}) + \rho(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$ ["三角形公理", 参看 **125** 及 **418** 段].

"序列 $\{x_n\}$ 收敛于极限元素 x" 以下列关系为其定义:

$$\rho(x_n, x) \to 0;$$

在这情形我们写

$$x = \lim x_n \quad 或 \quad x_n \to x.$$

现在举几个度量空间的例子.

A. 算术空间 —— 一维的或一般 m 度的.

在一维的情形元素 x 就是实数, 而

$$\rho(x, \bar{x}) = |x - \bar{x}|.$$

在 $m > 1$ 时元素 x 是实数有序组: $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)$, 这里 ξ_i 是点 x 的 "坐标". 在这情形

$$\rho(x, \bar{x}) = \sqrt{(\xi_1 - \bar{\xi}_1)^2 + \cdots + (\xi_m - \bar{\xi}_m)^2},$$

$\bar{\xi}_i$ 表示点 $\bar{x}$ 的 "坐标".

B. 区间 $[a, b]$ 内的连续函数 $x = x(t)$ 的空间, 带有度量

$$\rho(x, \bar{x}) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - \bar{x}(t)|.$$

C. 集合同上, 但换了另一种度量:

$$\rho(x, \bar{x}) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - \bar{x}(t)]^2 dt}$$

[参看 **418** 段附注].

D. 实数序列

$$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots),$$

其相应级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ 收敛的空间度量是:

$$\rho(x, \bar{x}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \bar{\xi}_n)^2}.$$

E. 有界实数序列空间, 带有度量

$$\rho(x,\bar{x})=\sup_{n}|\xi_n-\bar{\xi}_n|.$$

利用 "三角形公理" 不难证明, 对任何度量空间, 由收敛性元素序列 $\{x_n\}$ 的收敛于极限元素 x 可推出下列与已知的与波尔查诺 – 柯西条件相似的条件 [参看 **52** 段]:

$$\rho(x_n,x_{n'})<\varepsilon,\quad 只要\ n,n'>N_\varepsilon.$$

反过来说, 却并非在一切度量空间对每个满足这个条件的序列 $\{x_n\}$, 都存在极限元素 x. 那些使这种极限元素恒存在的空间叫做*完全空间*. 上列 A, B, D, E 就是完全空间的例子, 而 C 则是不完全的①.

现在, 为了使读者明白泛函分析中这种高度抽象性及一般性的用处, 我们举现代泛函分析创始人之一波兰数学家巴拿赫 (S. Banach, 1892—1945) 的一个定理为例. 该定理如下:

设给了一个泛函算子 (10), *定义在完全度量空间* $X=\{x\}$ *内并且将* X *的元素* x *仍映射为同一空间中的元素. 如果同时恒有*

$$\rho(U(x),U(\bar{x}))\leqslant\alpha\cdot\rho(x,\bar{x}),\quad 而\quad 0<\alpha<1,$$

则存在 (并且是唯一的) *一点* x, *使*

$$U(x_0)=x_0. \tag{11}$$

这种点叫做算子 U 的*不动点*; 它无非是*泛函方程*

$$x=U(x)$$

的 "根".

下面的想法可看作证明的线索. 如果 x 是任意一点, 而 x_0 是一个不动点 (我们姑且假设其存在!), 则

$$\rho(U(x),U(x_0))=\rho(U(x),x_0)\leqslant\alpha\cdot\rho(x,x_0),$$

如此元素 $x_1=U(x)$ 要比 x 离 x_0 近些! 自然会由 x_1 出发重复这种过程:

$$\rho(U(x_1),x_0)\leqslant\alpha\cdot\rho(x_1,x_0)\leqslant\alpha^2\cdot\rho(x,x_0),$$

而元素 $x_2=U(x_1)$ 更接近于 x_0. 这就启发我们想起, 由任一所取元素 x 出发, 重复施行算子 U 而做出一序列的元素

$$x_1=U(x),\quad x_2=U(x_1),\cdots,\quad x_n=U(x_{n-1}),\cdots. \tag{12}$$

可证明这个序列 $\{x_n\}$ 是满足波尔查诺 – 柯西条件, 由此 (因为讨论是完全空间) 可推出它收敛于某一极限元素 x_0. 然后可证明这就是所求的*不动元素* (并且还是唯一的). 证明程序如此, 其细节不讲了.

① 这种空间, 如果在其中添补所有连同其平方都是勒贝格可积的不连续函数 $x(t)$, 则可做成完全的. 在此两个 "几乎处处" 一致的函数看作是空间的同一元素.

读者要注意到按照形式 (12) 应用逐步逼近法就可求得 x_0. 我们不难得到第 n 次逼近的估计:

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant M\alpha^n \quad (M \text{ 为常数}).$$

现在分别举几个方面的问题, 它们可以利用这 "不动点原理" 来立即解决.

1) 理论天文学里的著名 "开普勒方程"

$$x = m_0 + \varepsilon \cdot \sin x \tag{13}$$

决定所谓行星偏近点角 x, 已经知道的是其平均近点角 m_0 及行星轨道离心率 ε $(\varepsilon < 1)$.

设 "空间" X 就是全体实数所成的集合 (参看 A), 而 "泛函算子" 就是数变量 x 的一个寻常函数:

$$U(x) = m_0 + \varepsilon \cdot \sin x.$$

显然, 这个算子的不动点 x_0 恰好就是所求的方程 (13) 的根.

因为

$$\begin{aligned}\rho(U(x), U(\bar{x})) &= |U(x) - U(\bar{x})| = \varepsilon \cdot |\sin x - \sin \bar{x}| \\ &\leqslant \varepsilon \cdot |x - \bar{x}| = \varepsilon \cdot \rho(x, \bar{x}),\end{aligned}$$

则该定理的条件实现. 如此, 我们可断定方程 (13) 有一个唯一的根 x_0, 而其计算可用逐步逼近法来进行.

2) 设给了一个第二类弗雷德霍姆积分方程, 含有任意数值参变量 λ:

$$x(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)x(t)dt, \tag{14}$$

这里 $f(s)$ 是区间 $[a,b]$ 内的一个连续函数, 而 $K(s,t)$ 是在正方形 $[a,b;a,b]$ 内连续的函数, 并且设要找的是这个方程的连续解 $x(s)$. 这里空间 X 就是 $[a,b]$ 的连续函数的空间, 其中有度量

$$\rho(x, \bar{x}) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - \bar{x}(t)|$$

(参看 B), 算子

$$U(x) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)x(t)dt$$

将每个连续函数 $x(t)$ 仍变为一个 s 的连续函数. 这算子的不动点 $x_0(t)$ 显然就是方程 (14) 的解.

我们来验证一下定理的条件. 既然函数 K 是有界的:

$$|K(s,t)| \leqslant M \quad (M\text{为常数}),$$

则有:

$$\begin{aligned}\rho(U(x), U(\bar{x})) &= |\lambda| \cdot \max_{a \leqslant s \leqslant b} \left| \int_a^b K(s,t)[x(t) - \bar{x}(t)]dt \right| \\ &\leqslant |\lambda| \cdot M \cdot (b-a) \cdot \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - \bar{x}(t)| = |\lambda| \cdot M(b-a) \cdot \rho(x, \bar{x}).\end{aligned}$$

由此可见只要

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)},$$

该定理的条件就实现了. 所以, 对参变量 λ 充分小 (绝对) 的值方程 (14) 有唯一的解 $x_0(t)$, 它也同样可用逐步逼近法得出.

3) 最后一个例子, 我们来看方程个数及未知数个数都是无穷 (但可数) 的联立线性方程组的解的问题; 这种方程组恒可写成

$$\xi_i = \sum_{k=i}^{\infty} a_{i,k}\xi_k + b_i \quad (i = 1, 2, 3 \cdots), \tag{15}$$

这里 $a_{i,k}$ 及 b_i 是已知的系数, 而 ξ_i 是未知数. 假设系数 $a_{i,k}$ 及 b_i 满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \leqslant \alpha < 1, \quad |b_i| \leqslant \beta \quad (i = 1, 2, 3 \cdots). \tag{16}$$

我们感兴趣的是方程组 (15) 的有界解, 即满足方程组 (15) 的有界数序列 $\{\xi_i\}$.

读者容易明白, 这里应该用有界序列 $x = \{\xi_i\}$ 的空间 X —— 具有度量

$$\rho(x, \bar{x}) = \sup_i |\xi_i - \bar{\xi}_i|$$

做基础 (参看 E). 等式

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\xi_i + b_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots) \tag{17}$$

将每一组有界的 $x = \{\xi_k\}$ 都变换为一组仍然是有界的 (由于 (16)) $y = \{\eta_i\}$, 即仍然是空间 X 的一个元素; 算子 $U(x)$ 就由此确定. 如果再取一个元素 $\bar{x} = \{\bar{\xi}_k\}$, 则此算子的相应值 $U(\bar{x})$ 将为元素 $\bar{y} = \{\bar{\eta}_i\}$, 可由类似 (17) 的等式所确定. 因为 [按不等式 (16) 的第一个]

$$\rho(y, \bar{y}) = \sup_i \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}(\xi_k - \bar{\xi}_k) \right| \right\} \leqslant \alpha \cdot \sup_k |\xi_k - \bar{\xi}_k| = \alpha \cdot \rho(x, \bar{x}),$$

所以按该定理所求的解存在, 并且是唯一的. 此解也可用逐步逼近法得出.

如此多样的问题而能由同一根据出发来解决, 这是一件很有教育意义的事情. 这例子使读者能更好地了解泛函分析的一般定理能如何在各个方面找到用处. 这种看来如此抽象的方法, 其力量就在于: 它以最简单的形式来研究种种对象及其间的关系, 而不考虑其对问题不重要的特殊性. 这也就是数学以往的发展经常走的这样的道路!

为了强调整个泛函分析的意义 (自然我们只接触了它的初步原理), 只要提到泛函分析 (指其较高深的部分) 在现代理论物理中有了重要的应用, 尤其是在量子力学里, 而它无疑地又反过来影响了泛函分析的发展.

如此, 屡次克服了个别学者甚至整代的学者们的错误和迷惑, 数学分析从开始到现在都在不断成长起来, 不断发展并且滋生起日新月异的嫩芽. 有些新的分支直接由认识客观世界的要求而发生, 另外有些是遵循分析本身的发展规律而出现, 随后才由于应用而被充实起来. 分析的各个分支相互渗透, 而在保持其固有问题和方法之下形成一个整体.

索 引

(数字表示段号)

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S